

(68) プレストレッシングにおける統計手法の有効活用のための基本的事項

八千代エンジニアリング(株) 技術本部 正会員 斉藤 昇

1. はじめに

周知のようにプレストレッシング結果は、ある特性値をもとに種々の判定を行う。従ってその判定の良否は当然ながら統計学の知識を、いかに正しく有効活用するかによって決まる。しかしながら現状を見るとき残念ながら有効活用されているとはいえないようである。本報告は使用するべき統計理論を実例によって示しながら、統計手法の有効活用のための基本的事項を整理しながらその明確化を提言したい。

なお統計学には大別して、記述統計学と推測統計学 (or 近代統計学) とに分けられるが、本論は当然ながら後者による。以下本論で用いる基本的な統計記号および用語を予め示しておく。

- (1) 母集団に対して $N(\mu, \sigma^2)$: 正規母集団 μ : 母平均 σ^2 : 母分散
- (2) 標本に対して n : 標本の大きさ x_i : 標本の特性値 $\bar{x} = \Sigma x_i / n$: 標本平均
 $S = \Sigma (x_i - \bar{x})^2$: 標本の平方和 $V = S / (n - 1)$: 不偏分散
- (3) 検定, 推定, 管理のための有意水準 or 危険率 $\alpha = 5\%$

2. 統計的にみた緊張管理グラフ

(1) 緊張結果のばらつく原因の要素を、工学的に簡易化して、 \ddot{u} と \dot{E}_p の二変数とすれば、荷重計の示度 σ_m は \ddot{u} のみの関数、緊張材の伸びまたは抜き量 Δl は \ddot{u} および \dot{E}_p の関数となる。すなわち、 $\sigma_m, \Delta l$ の直角座標は \ddot{u}, \dot{E}_p の菱形座標におきかえられる。

(2) $\dot{E}_p = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\ddot{u} = 0.2$ および 0.4 として緊張計算された結果は、図-1 の $C_{0.2}$ および $C_{0.4}$ で表示される。この2点を結ぶ直線上の \ddot{u} 値を、特に $\dot{\mu}$ とよびかえ、かつこの直線を $\dot{\mu}$ 直線と仮称する。

(3) 推定母集団の中心点を $C_0(\sigma_{m0}, \Delta l_0)$ 、緊張結果の引止め点を $C_i(\sigma_{mi}, \Delta l_i)$ とすれば、 C_0, C_i 間の離れ δ_i は、つぎのように求まる。

$$\delta_i = (\Delta l_i / \Delta l_0) - (\sigma_{mi} / \sigma_{m0})$$

(4) C_i 点に致る測定値の軌跡の傾きを θ_i とし、この軌跡と $\dot{\mu}$ 直線との交点を $\dot{\mu}_i$ とすれば、 θ_i と $\dot{\mu}_i$ は一対一に対応する。

(5) 導入緊張力の決定方法として

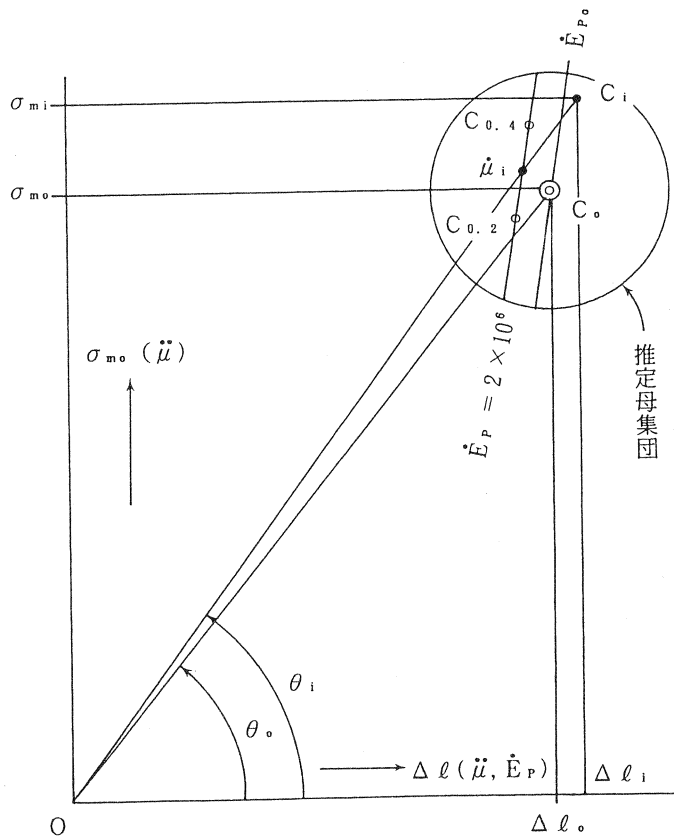


図-1 緊張管理グラフ

$\theta_i (= \hat{\mu}_i)$ の大きさに応じて、適切な \hat{E}_p 線上で引き止めるものとするれば、 $\hat{\mu}$ は統計上の特性値となる。なお $\hat{\mu}$ と δ との相関性については実証済みである。¹⁾

(6) 結局、緊張管理グラフの統計的意義は、母集団の推定法のよしあしによって決まる。なお中心点 C。は本来 $(\hat{\mu}, \hat{E}_p)$ の二次元分布として考えるべきであるが、現時点では $\theta_i = \hat{\mu}_i$ に対する管理限界を設定し、 \hat{E}_p の適切な値で引き止める簡易法による。

3. 統計的検定および推定

3.1 標本としての測定データ

図-1の推定母集団は試験緊張により求めるのが原則である。この求められた測定値群は $N(\mu, \sigma^2)$ よりの無作為標本であるとする。そのため試験緊張ケーブルの選出法として

(1) 総ケーブル本数12本中、作業時間、ケーブル形状を考慮して、桁端定着ケーブルのNo.6, 8, 10, 11, 途中曲上げケーブルのNo.5, 4, 2, 1の計8本とした。

(2) 順序性、方向性の分析可能なように緊張順序をきめる。

この結果、表-1のように測定データが得られた。

表-1 試験緊張結果

測定順序	ケーブル No.	緊張方向	$\hat{\mu}$	\hat{E}_p ($\times 10^4 \text{kg/cm}^2$)
1	6	左	0.20	1.86
2		右	0.34	1.94
3	8	右	-0.02	1.92
4		左	0.01	1.95
5	10	左	0.18	1.98
6		右	0.19	1.98
7	11	右	-0.20	1.96
8		左	-0.30	1.94
9	5	左	0.18	1.90
10		右	0.40	1.98
11	4	右	0.12	1.89
12		左	0.32	2.00
13	2	左	0	1.93
14		右	0.10	1.94
15	1	右	-0.20	1.81
16		左	0.29	2.04

3.2 標本の無作為性

(1) 異常値の検出

表-1より $n=16, \Sigma \hat{\mu}=1.61, \bar{\hat{\mu}}=0.10$

と求められる。 $\hat{\mu}$ 値の最大値は0.40、最小値は-0.30であり平均値からの離れの大きい最小値-0.30に異常値の疑いがある。それには

$$\text{統計量 } T = \frac{\bar{\hat{\mu}} - \min \hat{\mu}}{\sqrt{V}} \text{ が } T \text{ 分布} \quad (1)$$

となることを利用する。ここに

$$S = 0.636 \quad V = 0.636 / 15 = 0.0424$$

$$\therefore T = \{0.10 - (-0.30)\} / \sqrt{0.0424} = 1.95$$

しかるに、表-2より $T(16, 0.05) = 2.44 > T$

したがって最小値-0.30は異常値とはいえない。

(2) ケーブル形状による差の検定

桁端定着ケーブルをAグループ。途中曲上げケーブルをBグループとする
AとBとに対応関係がないので、先づ両グループの等分散の検定を行う。

i) 等分散の検定

A, B両グループの平均値 $\bar{\hat{\mu}}_A, \bar{\hat{\mu}}_B$ および平方和 S_A, S_B は、

$$n_A = 8, \bar{\hat{\mu}}_A = 0.05, S_A = \Sigma (\hat{\mu}_A - \bar{\hat{\mu}}_A)^2 = 0.3346$$

$$n_B = 8, \bar{\hat{\mu}}_B = 0.15, S_B = \Sigma (\hat{\mu}_B - \bar{\hat{\mu}}_B)^2 = 0.2603 \text{ と求められる。}$$

$$\text{統計量 } F = \frac{V_A}{V_B} = \frac{(n_B - 1) S_A}{(n_A - 1) S_B} \text{ が } F \text{ 分布} \quad (2)$$

となることを利用する。特に $n_A - 1 = n_B - 1 = \phi = 7$

$$\therefore F = \frac{0.3346}{0.2603} = 1.29$$

これに対し、表-3より $F(7, 0.025) = 4.99 > F$

表-2 $T(n, \alpha)$

α n	0.05
4	1.46
6	1.82
8	2.03
10	2.18
12	2.29
14	2.37
16	2.44
18	2.50
20	2.56
22	2.60
24	2.64

表-3 $F(\phi, \frac{\alpha}{2})$

$\frac{\alpha}{2}$ ϕ	0.025
3	15.4
4	9.60
5	7.15
6	5.82
7	4.99
8	4.43
9	4.03
10	3.72
11	3.48
12	3.28
13	3.11

したがって、両グループの分散は等しいと考えてよい。

ii) 平均値の差の検定

二組の標本グループが等分散の場合には

$$\text{統計量 } t = \frac{|\bar{\mu}_A - \bar{\mu}_B|}{\sqrt{\frac{S_A + S_B}{n_A + n_B - 2} \left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B} \right)}} \text{ は自由度 } (n_A + n_B - 2) \text{ の } t \text{ 分布} \quad (3)$$

となることを利用する。

$$\therefore t = \frac{|0.05 - 0.15|}{\sqrt{\frac{0.3346 + 0.2603}{8 + 8 - 2} \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right)}} = 0.97$$

これに対し、表-4より、 $t(14, 0.05) = 2.15 > t$

したがって、A、B両グループは同一母集団からの無作為標本であるとしてよい。

(3) 順序性の検定

緊張順序による有意差を検定する。表-1より直感では後で緊張した方が μ が大きいようである。いま先に緊張したグループをC、後で緊張したグループをDとすれば、両グループに対応関係があるので、両者の差 $d_i = C_i - D_i$ に着目する。この場合

$$\text{統計量 } t = \frac{|\bar{d}| \sqrt{n}}{\sqrt{V_d}} \text{ は自由度 } (n - 1) \text{ の } t \text{ 分布} \quad (4)$$

となることを利用する。

$$n_c = n_d = n = 8, \quad \sum d_i = -1.09, \quad \bar{d} = \sum d_i / n = -1.09 / 8 = -0.136$$

$$S_d = \sum (d_i - \bar{d})^2 = 0.2206, \quad V_d = S_d / (n - 1) = 0.2206 / 7 = 0.0315$$

$$t = \frac{0.136 \sqrt{8}}{\sqrt{0.0315}} = 2.17$$

これに対し、表-4より $t(7, 0.05) = 2.37 > t$

したがって、緊張順序による差はないと考えてよい。

(4) 方向性の検定

緊張方向による有意差を検定する。統計手法検定手順は(3)と全く同様である。いま、左側より緊張したグループをE、右側より緊張したグループをFとすれば $d_i = E_i - F_i$

$$n_E = n_F = n = 8, \quad \sum d_i = 0.150, \quad \bar{d} = 0.019$$

$$S_d = 0.366, \quad V_d = 0.0523$$

$$t = \frac{0.019 \sqrt{8}}{\sqrt{0.0523}} = 0.235 < t(7, 0.05)$$

したがって、緊張方向による差もないと考えてよい。

3.3 母平均の区間推定

3.2の検定結果より、試験緊張結果より求めた表-1の測定値群は何れも、 $N(\mu, \sigma^2)$ よりの無作為標本であることが確認された。したがって、これらの測定値群から図-1のC.点を推定することができる。この場合、一般に

$$\text{統計量 } t = (\bar{x} - \mu) \sqrt{\frac{n}{V}} \text{ が自由度 } (n - 1) \text{ の } t \text{ 分布} \quad (5)$$

となることを利用する。本例の場合 $n = 16$ 表-4より $t = (15, 0.05) = 2.13$ と求められるから、式(5)は

$$\mu = \bar{x} \pm 2.13 \frac{\sqrt{V}}{4} \quad (6)$$

表-4 $t(\phi, \alpha)$

$\phi \backslash \alpha$	0.05
5	2.57
6	2.45
7	2.37
8	2.31
9	2.26
10	2.23
11	2.20
12	2.18
13	2.16
14	2.15
15	2.13
16	2.12
17	2.11
18	2.10
19	2.09
20	2.09

と区間推定することができる。

(1) $\dot{\mu}$ の区間推定値

式(6)より $\mu = \dot{\mu}_0$, $\bar{x} = \bar{\dot{\mu}}$, $V = V_\mu$ とおけば

3.2(1)より $\bar{\dot{\mu}} = 0.10$, $V_\mu = 0.0424$ と求まっているから

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_0 &= 0.10 \pm 2.13 \frac{\sqrt{0.0424}}{4} = 0.10 \pm 0.11 \\ &= -0.01 \sim 0.21 \end{aligned}$$

(2) \dot{E}_p の区間推定値

式(6)より $\mu = \dot{E}_{p0}$, $\bar{x} = \bar{\dot{E}_p}$, $V = V_E$ とおけば

表-1より $\bar{\dot{E}_p} = 1.94 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $S_E = \Sigma (\dot{E}_p - \bar{\dot{E}_p})^2 = 0.0468$

$$\therefore V_E = S_E / (n-1) = 0.0468 / 15 = 0.00312$$

$$\begin{aligned} \therefore \dot{E}_{p0} &= (1.94 \pm 2.13 \frac{\sqrt{0.00312}}{4}) \times 10^6 = (1.94 \pm 0.03) \times 10^6 \\ &= (1.91 \sim 1.97) \times 10^6 \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

と求まる。適切な \dot{E}_p としては理論的には平均値 $1.94 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ でよい筈であるが、推定資料の少いことを考慮して下限値を採用することも考える必要がある。

4. 品質管理としてのプレストレッティング管理

4.1 3シグマ法の理解

プレストレッティング管理に対する統計手法の有効活用は、当然ながら一般の品質管理に用いられている \bar{x} -R管理図を適用することになる。すなわち管理限界の巾としては3シグマ法に従うことになる。

1グループの数をmとすれば、 $\dot{\mu}$ の管理限界は

$$\bar{\dot{\mu}} \pm 3 \frac{\bar{R}}{d_2 \sqrt{m}} \quad (7)$$

で与えられる。ただし、プレストレッティング管理の場合、一般の品質管理の場合に較べ、最初の標本数が非常に少い。(一般の100に対して、たかだか10~20位)したがって、少くとも初期の段階においては、むしろ原点に戻り、 $\sqrt{V} \approx \bar{R} / d_2$ の関係から

$$\bar{\dot{\mu}} \pm 3 \sqrt{\frac{V}{m}} \quad (8)$$

を用いるのがよい。

ここで、3シグマ法の理解を深めるため若干の補足を加える。それは正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ が既知ならば $\mu \pm 1.96\sigma$ の位置が有意水準5%に相当していることは確かである。このことから σ^2 の代りに不偏分散Vを用い、かつ $1.96 \approx 2$ として

$$\bar{\dot{\mu}} \pm 2 \sqrt{\frac{V}{m}} \quad (9)$$

を管理限界に選んだ例をみかけるが、母集団未知の原則に立てば、統計理論として多分に手前勝手なこじつけというそりは免がれない。このことの理解のために、3シグマ法導入時のいくつかの論争についての文献(5)~(11)と、何故3かという数字的根拠については文献(12)を参照されたい。

4.2 管理図法の適用

(1) 管理限界の設定

1主桁当りのケーブル本数12本より、 $m = 4$ とする。3.2, (1)より $\bar{\dot{\mu}} = 0.10$, $V = 0.0424$ より

$$\dot{\mu} = 0.10 + 3 \sqrt{0.0424 / 4} = 0.10 \pm 0.31$$

となる。なおプレストレッシング管理の場合、図-1の緊張管理グラフによってケーブル1本毎の管理も行うので、この場合に対しては $m=1$ だから

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= 0.10 + 3\sqrt{0.0424} = 0.10 \pm 0.62 \\ &= -0.52 \sim 0.72\end{aligned}$$

となる。

(2) 管理図法による管理

基本的には一般の品質管理と全く同じなので、JIS品質管理¹³⁾によればよい。ここではプレストレッシング管理の特殊性による補足をつけ加えると

i) 管理限界の最初だけ、止むを得ず式(8)によったが、本緊張データが得られてくれば、本来の式(7)に移行する。

ii) グループ構成として普通は緊張順にとるのが効率的であるが、時として偏りが出る場合がある。たとえば、管理上傾向性、周期性を示す場合があり、その場合適切な組換えを行う必要がある。¹⁴⁾

iii) プレストレッシング管理の実施例については文献15)~18)参照

iv) R管理図については言及してないが、当然JIS品質管理による。

5. おわりに

本論文は、プレストレッシングに関する統計手法の有効活用を実例によって示してきた。特に管理図作成のための標本数が極端に少く、かつ決定的判断(導入緊張力の決定)を下さねばならない。したがって、標本の質について、一般の品質管理以上に神経を使わねばならない。そのための必要不可欠と思われる統計手法の有効活用についての基本的事項を要約すれば

(1) 測定値に対する認識

我々が得られる測定値は、 $N(\mu, \sigma^2)$ よりの無作為標本であり、この標本値より統計学の知識を利用して母集団に対する検定、推定および管理を行わねばならない。

(2) 各統計量に対する分布理論の活用

- i) T分布の活用: 標本平均より、かけ離れた値に対する検定(式(1))
- ii) F分布の活用: 対応のない平均値の差の検定における等分散の検定(式(2))
- iii) t分布の活用: 対応のない平均値の差の検定($\phi = n_A + n_B - 2$ のt分布, 式(3))
- iv) t分布の活用: 対応のある平均値の差の検定($\phi = n - 1$ のt分布, 式(4))
- v) t分布の活用: 母平均の区間推定($\phi = n - 1$ のt分布, 式(5))

(3) $\bar{x} - R$ 管理図の活用

プレストレッシング管理として最適な管理手法は $\bar{x} - R$ 管理図を活用することである。そのため

- i) 3シグマ法の理解(4.1参照)
- ii) 管理限界算定式としての一般式は式(7)であるのは当然であるが、プレストレッシングの特性上、最初のみ式(8)とする。

最後に、今後の研究課題として考えられる項目をあげる。

(1) 基礎的研究への活用

プレストレッシング発展のため、諸先輩が種々な基礎的実験をつづけてきた。それらの測定結果を推測統計学の立場で見直し、定量的な裏付けを与えたい。

- i) ケーブルの形状、性状による有意性
- ii) 同一現場における時間による有意性
- iii) 緊張時とセット時の摩擦係数の有意性¹⁵⁾

(2) 有意水準 α の程度把握

有意差判定の場合、有意水準5%ぎりぎりか、1%以下か判定の程度を知りたい場合があるので、標本数 n と有意水準 α との関係をグラフまたはノモにより、 n 、 α の任意の値が読みとれるようにしたい。

(3) 二次元分布の研究

本来、図-1の緊張管理グラフにおける推定母集団は $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}_p)$ の二次元分布として求めるべきであろう。しかし、工学的には現状の $\hat{\sigma}_p =$ 一定の場合の $\hat{\mu}$ を特性値としている。少なくとも定性的には問題はないものと思われるが、定量的な証明が望まれる。

参考文献

- 1) 野口 功： プレストレストコンクリート橋梁時に鉄道橋におけるプレストレッシングの管理に関する研究、土木学会論文集、第102号、PP34~36、1964年2月
- 2) 山内二郎： 最大偏差と同一標本の標準偏差との比、統計数値表、PP59~60(解説)PP90(表)、1972年5月
- 3) 中村慶一： 棄却検定、技術者のための統計解析、PP63~65、1965年6月
- 4) 森口繁一： t表およびF表、日科技連数値表A、PP20~21および24~31、1962年9月
- 5) 森口繁一： 品質管理の基礎概念について、品質管理、VOL.1、No.3、PP4~9、1950年5月
- 6) S Q Cリサーチ・グループ： 3シグマ法批判の再批判、品質管理、VOL.1、No.4、PP29~33、1950年6月
- 7) S Q Cリサーチ・グループ： F分布による品質管理法の研究、品質管理、VOL.1、No.5、PP18~25、48、1950年7月
- 8) 森口繁一： 統計的行動方式としての品質管理、品質管理、VOL.1、No.7、PP8~12、1950年9月
- 9) 和気孝太郎： 討論「品質管理論」を読んで、品質管理、VOL.1、No.8、PP26~29、44、1950年10月
- 10) 森口繁一： あとぢえの話、品質管理、VOL.5、No.5、PP7~10、17、1954年5月
- 11) 森口繁一： 極値か平均値か、品質管理、VOL.6、No.3、PP4~7、48、1955年6月
- 12) 中村慶一： 工程平均の異常検出、技術者のための統計解析、PP202~208、1965年6月
- 13) 日本規格協会： 管理図法、J I Sハンドブック品質管理、PP302~308、1971年5月
- 14) 野口 功、斉藤 昇： ケーブルのグループ分けについての検討、プレストレストコンクリート技術協会第3回年次学術講演会、PP31~32、1963年2月
- 15) 菅原 操、野口 功： 管理図による管理、PC工事の施工管理、PP164~173 1966年1月
- 16) 斉藤 昇、橋田敏之： 管理の実際、PC橋プレストレッシングと設計・施工、PP201~210、1984年7月
- 17) 日本道路協会： プレストレッシング管理の実例、プレストレストコンクリート道路橋・施工便覧、PP336~341 1973年10月
- 18) プレストレストコンクリート建設業協会： 管理図による管理、プレストレストコンクリート施工管理基準(案)、PP33~35 1986年10月
- 19) 斉藤 昇、橋田敏之： PC鋼材の緊張時と戻し時の摩擦についての考察、プレストレストコンクリート技術協会第6回年次学術講演会、PP5~6、1966年2月