

#### (4) 周辺梁を有するPCスラブのための 一有限要素力学モデルについて

北海道大学工学部 正会員 ○上田 正生  
室蘭工業大学 杉野目 章  
北海道大学工学部 内山 武司

### 1. 序 論

欧米(特に米国)においては、新たに建設されるオフィスビル等の床スラブの多くが「フラットスラブ・タイプのPCスラブ」で構成されていることは、広く知られているところである。しかしながら、日本においては、PCスラブそのものの建築構造物への採用率が極めて低く、また、稀にPCスラブを使用することがあっても、欧米のようなフラットスラブ・タイプの構造が選定される例は更にまた一段と少なくなり、通常、我が国で多用されるRCスラブの場合と同様、ラーメン等に組み込まれた「周辺梁を有するタイプのPCスラブ」を採用する例が殆どのである。

PCに限らず、一般に周辺梁を有するタイプのスラブ構造は、梁とスラブのそれぞれの部材中心が、両者の接合部において不連続となるため、その力学性状をより正確に評価しようとする、この接合部における「材軸の偏心」を出来得る限り忠実に考慮に入れて解析することが必要になる。周知のように、この種の梁スラブ接合部の問題をも取り扱うことができる「RC構造のための既往の代表的な力学モデル」としては、1) 建築学会RC構造計算規準に取り入れられているように、接合部をT形梁の有効幅の問題として捉える所謂「有効幅モデル」<sup>1)~3)</sup>と、2) 梁部分を厚肉のスラブの一部として取り扱う「一体化スラブモデル」<sup>4)~5)</sup>、および、3) 梁部材軸のスラブ中央面からの偏心を表示するためのリンク要素を導入する「リジッドリンクモデル」<sup>6)~7)</sup>の3種がある。著者らが既に報告したように、これら3種の力学モデルの内でも信頼性が高いのは、3)のリジッドリンクモデルであるが、しかし、既往のリジッドリンクモデルをそのままの形でPCスラブ構造に適用しようとする、幾つかの困難な問題に直面することになる<sup>8)</sup>。

本論文では、梁幅区間においてPCテンドンが果たす重要な力学的貢献をも容易に考慮することが可能な「梁・スラブ接合部のための力学モデル」を提案し、これと既報の曲線テンドンを有するPCスラブのための有限要素解析法<sup>9)</sup>を組み合わせることによって、周辺梁を有するPCスラブ構造をも矛盾なく取り扱うことができる“より適用性の広い解析手法”を展開する。さらに本解析法の妥当性を検討するため、若干の数値計算例を掲げ、本解析値と既往の力学モデルによる解との比較を試みる。

### 2. 既往の力学モデルの概要と問題点

序論でも述べたように、梁とスラブの接合部の問題を取り扱うことが出来る既往の力学モデルとしては、1) 有効幅モデル、2) 一体化スラブモデル、3) リジッドリンクモデルの3種がある。以下では、これらの3種の力学モデルの概要と問題点について概説する。

#### (1) 有効幅モデル<sup>1)~3)</sup>

有効幅モデルは、梁の剛性として、梁自体の剛性のみならず隣接するスラブの一部分(有効幅分)の剛性をも加算した「等価梁の剛性」を用いることによって、「梁の材軸のスラブ中央面からの偏心の効果」を間接的に考慮するものである。この等価梁の剛性には、①鉛直曲げに関する有効剛性 $E_r I_b$ と、②戻りに関する有効剛性 $G_r J_T$ の2種があり、それぞれ別個に評価されることになる。しかし、その定式化の経緯をみると明らかなよう

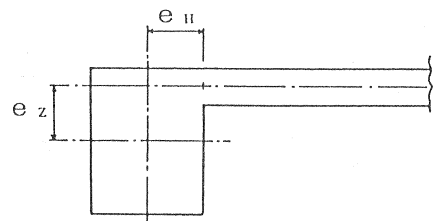


図-1 スラブと梁の材軸の偏心

に、この種のモデルには、図-1に示す梁とスラブ間の鉛直方向の偏心  $e_z$  は考慮されているが、水平方向の偏心  $e_H$  の影響、即ち「梁幅の効果」が十分には組み込まれておらず、結果として、梁幅部分が幅ゼロの直線状に圧縮されてスラブに接合された形の力学モデルとなっている。<sup>9</sup>

(2) 一体化スラブモデル

スラブの上面がフラットな「ドロップ・パネル状の変厚スラブ」をも取り扱えるように、板理論にスラブ面内の  $x, y$  方向の変位  $u, v$  を導入し、膜力と曲げのカップリングをも考慮して定式化しておく<sup>10,11</sup>、周辺が梁で支持されるスラブの梁の部分は、数値計算上、厚肉のスラブとして解析することができることになる。このモデルには、梁部分の材軸の鉛直方向と水平方向の偏心量  $e_z$  と  $e_H$  がともに考慮されており、一見すると理想的な力学モデルのように思われる。しかしながら、梁部分を厚肉のスラブとして扱うこのモデルは、梁の振りが問題とならない「連続スラブ構造の中央部のスラブパネル」に対しては、良好で妥当な解を与えるが、梁の振り変形の影響が大きくなる「自由辺に接する外梁を有するスラブパネル」に適用すると、梁部分の剛性をかなり過大に評価することになり、その解の適用範囲は極く限定されている。

(3) リジッドリンクモデル

周知のように、リジッドリンク(オフセット要素とも別称する)による梁要素の節点 I (スラブ要素の接点  $i$  に対応)の節点変位  $\{\delta_B\}_i$  の偏心(スラブ要素の節点から)の効果は、次式によって考慮される。

$$\{\delta_S\}_i = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & e_z & -e_{Hy} \\ 0 & 1 & 0 & -e_z & 0 & e_{Hx} \\ 0 & 0 & 1 & e_{Hy} & -e_{Hx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ w_B \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_I = [Ti] \{\delta_B\}_i \quad (1)$$

但し、 $\{\delta_S\}_i$  : スラブ要素の節点  $i$  の節点変位ベクトル、 $\{\delta_B\}_I$  : スラブ要素の節点  $i$  に対応する梁要素の節点変位ベクトル、 $e_{Hx}, e_{Hy}, e_z$  : それぞれ対応するスラブの節点  $i$  と梁の節点  $I$  の間の  $x, y, z$  方向の偏心距離、 $[Ti]$  : 変換マトリックス。

図-2に示すように、梁要素の節点をリジッドリンクによってスラブ要素の対応する節点に連結するこのモデルは梁材軸の鉛直方向と水平方向の偏心  $e_z, e_H$  (上記のように、 $e_H$ には  $x$  および  $y$  方向の偏心  $e_{Hx}$  と  $e_{Hy}$  の2種があり、必要に応じて選定されることになる)を同時に考慮することが可能であり、前述の2者を含めた既往の力学モデルのうちでは、最も信頼性の高いモデルである。しかしながら、このリジッドリンクモデルをそのままの形で、周辺が梁で支持された「曲線テンドンを有するPCスラブ」に適用し、満足し得るような成果を上げることは困難である。その理由は、図-3に掲げるように、この種のリジッドリンクのみでは、テンドンの曲線形が大きく変化する梁幅区間でのプレストレス力によるテンドンの主要な力学的貢献を正確に表示し反映させることができないからである。

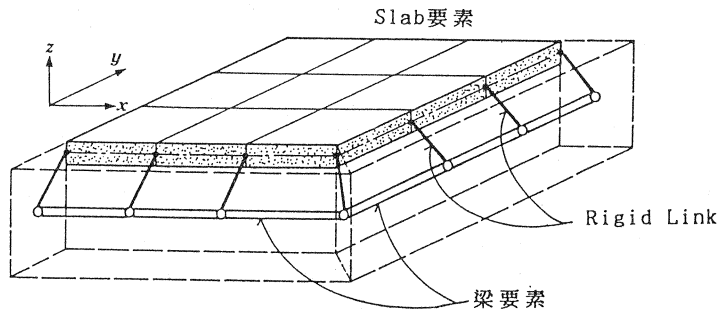


図-2 既往のリジッドリンクモデルの概念図

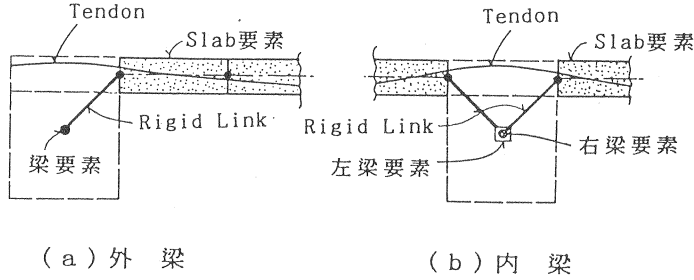


図-3 既往のリジッドリンクモデルをPCスラブに適用した場合の問題点

3. 周辺梁を有するPCスラブのための有限要素解析手法

前節2では、梁幅区間におけるテンダンの力学的効果が支配的となり得る「周辺梁を有するPCスラブ」に、RC構造を対象とした「既往の梁・スラブ接合部のための力学モデル」を、そのままの形で適用しても良好な結果を得ることは困難であることを指摘した。

ここでは、周辺梁を持つPCスラブにも適用可能な「梁・スラブ接合部のための新たな力学モデル」と、これを既報のPCスラブのための有限要素<sup>9</sup>と結合させる方法について概説する。

(1) リジッドリンクとリジッドビームを用いた梁・スラブ接合部モデル

ここで提案する「梁・スラブ接合部のための力学モデル」では、曲線テンドンが配置されている部分には全てスラブ要素が存在するものとし、また、梁区間内にあるスラブ要素は、梁幅方向に2分割され、その分割線は梁幅中央線上に位置するものと仮定される。図-4に本力学モデルの概念図を掲げる。図からも知り得るように、このモデルでは、①斜線部の断面をもつ梁要素がz方向の偏心量 $e_z$ のみをもって梁幅中央線上にあるスラブ要素の節点に接合されており、また、

②この中央分割線上のスラブ要素の節点とその両側に隣接するスラブ要素の節点間(例えば、図中のa-i, i-a間およびb-j, j-b間・・・等々)が、剛性の十分大きなリジッドビーム要素で連結されている。従って、①のリジッドリンクによるスラブ要素の節点iの変位ベクトル $\{\delta_s\}_i$ と対応する梁要素

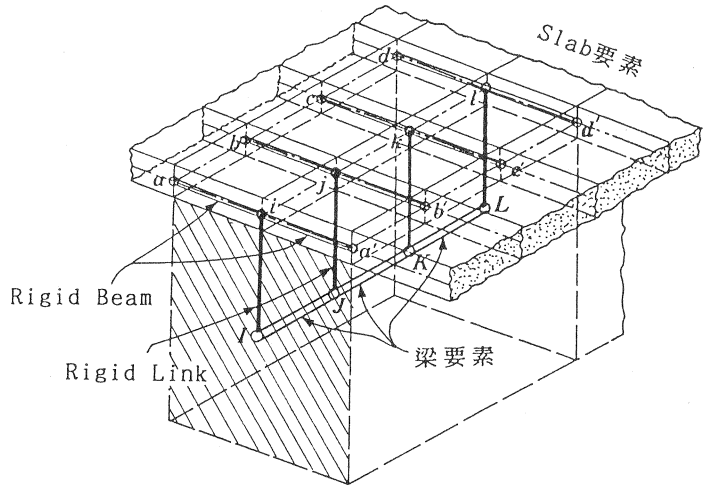


図-4 リジッドリンクとリジッドビームによる接合部モデル

の節点変位ベクトル $\{\delta_B\}_i$ の関係は、次式で表示される。

$$\{\delta_s\}_i = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & e_z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -e_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_B \\ v_B \\ w_B \\ \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix}_i = [Ti] \{\delta_B\}_i \quad (2)$$

但し、上式の各記号については前掲の(1)式を参照。

また、スラブ要素の節点間に連結される②のリジッドビームの剛性マトリックス $[K_{RB}]$ は、図-5に示す節点  $i-a$  間の  $x$  方向のリジッドビームを例にとれば、次のようになる。

$$[K_{RB}] = \frac{E_{RB}}{L^3} \begin{bmatrix} A_n L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -A_n L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12I_z & 0 & 0 & 0 & 6I_z L & 0 & -12I_z & 0 & 0 & 0 & 6I_z L & 0 \\ 12I_y & 0 & -6I_y L & 0 & 0 & 0 & 0 & -12I_y & 0 & -6I_y L & 0 & 0 \\ & \beta_x L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta_x L^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & 4I_y L^2 & 0 & 0 & 0 & 6I_y L & 0 & 2I_y L^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 4I_z L^2 & 0 & -6I_z L & 0 & 0 & 0 & 0 & 2I_z L^2 & 0 \\ & & & & A_n L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 12I_z & 0 & 0 & 0 & 0 & -6I_z L & 0 \\ & & & & & & 12I_y & 0 & 6I_y L & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & \beta_x L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 4I_y L^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 4I_z L^2 & 0 & 0 \\ \text{SYM.} & & & & & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (3)$$

但し、 $E_{RB}$ ：リジッドビームのヤング係数、 $A_n$ ：リジッドビームの断面積、 $L$ ：リジッドビームの要素長、 $I_y, I_z$ ：それぞれ  $y, z$  軸に関するリジッドビームの断面2次モーメント、 $\beta_x$ ：リジッドビームの  $x$  軸まわりのねじり係数。

(3)式の $[K_{RB}]$ の各項は、言うまでもなく、この梁がその名の通り十分にリジッドであるように（例えば、 $E_{RB}=\infty$ または、 $A_n=I_y=I_z=\infty$ ）決定される

以上で明らかなように、ここで提案する接合部モデルは、梁材軸の鉛直方向の偏心の効果をリジッドリンクで、また、梁幅の効果をリジッドビームで評価しようとするものであり、結果として、既往のリジッドリンクモデルのみでは表示し得なかった梁幅区間における「曲線テンドンの力学的貢献」が矛盾なく組み込まれることになる。

尚、図-4中のリジッドリンクに接合される本来の梁要素については、紙面上の制約から触れることができなかったが、この梁要素も(3)式と同様に2軸曲げ剛性を有する梁の剛性マトリックス（但し、この場合には、リジッドな梁としてではなく、この梁の本来の断面に相応しい剛性をもつものとして）として評価されることを付記する。

### (2) 接合部モデルとPCスラブ要素の結合

前項(1)で概述したように、本接合部モデルは、①リジッドリンクによってスラブ要素に接合される梁要素と、②リジッドビームと名付けられた梁要素からなっている。従って、この接合部モデルは、これを構成する2種の梁要素と既報のPCスラブ要素<sup>9</sup>とが結合され一体となって初めて、周辺梁を有するPCスラブ構造に適用することが可能となる。ここで問題となるのは、これらの梁要素とスラブ要素の節点自由度の違いである。即ち、既にみたように、本接合部モデルを構成する2種の梁要素の一節点当りの自由度は、変位  $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$  の6個であり、一方、PCスラブ要素の一節点当りのそれは、5個の変位  $u, v, w, \theta_x, \theta_y$  と  $m$ （任意である）層のテンドンのすべり変位  $S_1, S_2, \dots, S_1, \dots, S_m$  の計  $(5+m)$  個となっており、両者の自由度は大

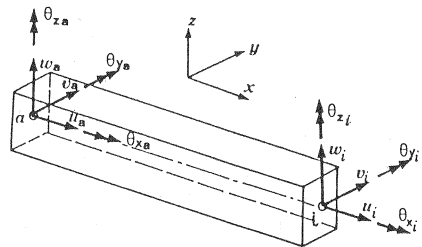


図-5 リジッドビーム要素

大きく異なっている。しかしながら、各接合部モデルを構成するこれら2種の梁要素の剛性は、これらが連結されるスラブ要素の剛性マトリックスの一部に加算・吸収されてしまい、結果として、周辺梁を有するPCスラブとしての「全構造系剛性マトリックス」が構築されることになるから、接合部モデルとPCスラブ要素を結合する際に真に問題となるのは、梁要素には有ってスラブ要素には無い自由度 $\theta_x$ のみである(実際、スラブ要素に有って梁要素には無い「すべり変位に掛かるm個の自由度」は、単に梁要素から加算される剛性の分が無いだけで全く何の障害にもならない)ことが分かる。この「梁要素には有ってスラブ要素には無い自由度 $\theta_x$ 」の問題は、スラブ要素に剛性ゼロのダミーの自由度 $\theta_x$ (梁要素が連結されていない部分のスラブ要素のこのダミー自由度 $\theta_x$ は、全体構造系の剛性マトリックス作成後、これを解く前にしばしば縮約される<sup>7)</sup>)を追加することによって容易に対処することができ、かくして「周辺梁を有するPCスラブのための有限要素解析」が可能となる。

#### 4. 数値計算例と考察

本報告で提案した梁・スラブ接合部モデルを用いた解析手法の妥当性を調べるため、周辺が梁で支持されるスラブシステムのうちでは最も過酷な条件を有する単一スラブパネルを例にとり、既往の力学モデルによる解との比較を行うこととする。

##### (1) 解析スラブ構造の概要

図-6に、ここで解析の対象とするスラブシステムの概要を、また図-7には、仮定材料性状とテンドンプロファイル<sup>12)</sup>を掲げる。図からも知り得るように、このスラブ構造は、断面40cm×80cmのコンクリート梁と断面60cm×60cmのコンクリート柱に支持された板厚20cmのアンボンドPCスラブである。但し、解析に際しては、4隅の柱は図-6の(b)に示すように上・下端で固定された状態でスラブと梁を支持しているものと仮定し、柱の曲げ変形を考慮するものとする。

##### (2) 計算結果とその考察

スラブ部分には全て既報のPCスラブ要素を使用し、接合部モデルには1)既往の一体化スラブモデル、2)既往のリジッドリンクモデル、及び、3)リジッドリンクとリジッドビームによる本接合部モデル、をそれぞれ採用した場合の3種の解を用いて計算を行ってみる。但し、2)のリジッドリンクモデルについては、図-8に斜線で明示したように、梁内に配置されるテンドンをも考慮するため、梁要素の上部に「片持ち状のスラブ要素」を追加し、また、スラブ部分については全て10×10分割で計算を行っている。

表-1は、積載荷重(380kg/m<sup>2</sup>)のみが作用した時の、このスラブシステム(テンドンの剛性は無視)の上記3種の接合部モデルによる解析結果を比較したものである。表には、中央点の撓みと、拘束辺中央およびスラブ中央点の曲げモーメントを掲げたが、この結果によれば、一体化スラブモデルは、予期したとおり最も剛性が高く、「片持ちスラブ要素」を追加した既往のリジッドリンクモデルも変則的ながら、本接合部モデルにやや近い値が得られている。また、表-2には、プレストレス力導入(テンドン1本当りの導入プレストレス力=18.1 ton)時の、スラブ主要点における各接合部モ

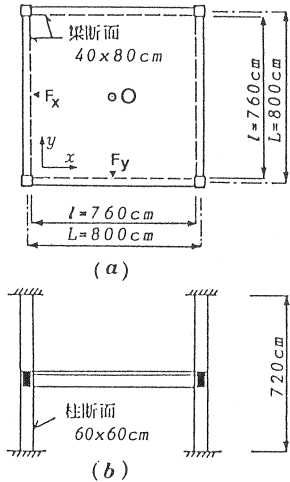


図-6 スラブ構造の概要

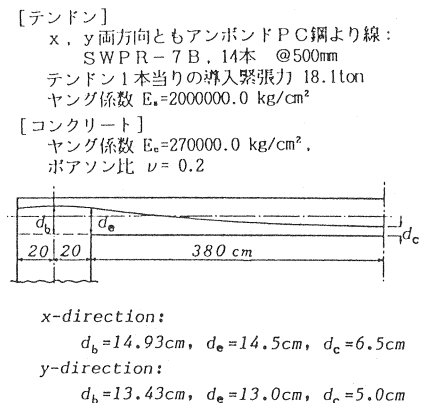


図-7 材料性状とテンドンプロファイル

片持ちスラブ要素

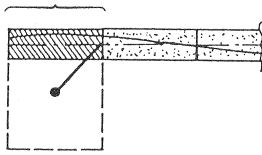


図-8 既往のリジッドリンクモデルのための追加片持ちスラブ

表1 積載荷重時(380kg/m<sup>2</sup>)の解析結果の比較

解の種類別	撓み (mm)	曲げモーメント $M_x, M_y$ (kg · m/m)	
		拘束辺中央 $F_x, F_y$	中央点O
力学モデル			
一体化スラブモデル	1.56363	-925.217	583.610
リジッドリンクモデル	1.90747	-623.575	689.216
本接合部モデル	1.84306	-735.884	654.009

表2 プレストレス力導入時の解析結果の比較

解の種類別	撓み (mm)	曲げモーメント $M_x$ (kg · m/m)		曲げモーメント $M_y$ (kg · m/m)	
		拘束辺中央 $F_x$	中央点O	拘束辺中央 $F_y$	中央点O
力学モデル					
一体化スラブモデル	-1.49405	2177.47	-908.815	2081.38	-903.774
リジッドリンクモデル	-1.70674	2040.14	-975.836	1749.95	-941.800
本接合部モデル	-1.61231	2088.80	-950.653	1872.13	-924.851

デルによる解析結果を一覧した。この計算例も、表-1と同様なスラブの剛性の評価傾向を示しており、リジッドリンクモデルが本モデルと近似した解を与えている。しかし、この既往のリジッドリンクは、内梁にはそのまま適用できない等の問題がある。従って、これら3種の接合部モデルの中で最も適用性が広く信頼性が高いのは、「リジッドリンクとリジッドビームによる本接合部モデル」であると言うことができる。

### 5. 結 言

本報告では、リジッドリンクとリジッドビームを用いた新しい梁・スラブ接合部モデルの提案を行い、次いで、このモデルを著者らの一人が開発した既報のPCスラブ要素<sup>9</sup>と組み合わせることによって、より適用性の広い「周辺梁を有するPCスラブシステムのための有限要素解析法」が展開可能であることを示し、さらに若干の数値計算例を掲げその有用性を明らかにした。

#### 【参考文献】

- 1) 日本建築学会：鉄筋コンクリート構造計算規準・同解説、1988。
- 2) 東 洋一：T型大梁・小梁の有効巾と有効剛度、日本建築学会論文報告集、No.57,1957,7。
- 3) 東 洋一：振りを受けるT型材の有効巾、日本建築学会春季大会論文集、1955.5。
- 4) 皆川洋一：鉄筋コンクリート造床スラブの弾塑性挙動に及ぼす幾何学的非線形性の影響、日本建築学会構造系論文報告集、No.361,1986,3。
- 5) 上田正生、松倉満智子、和田俊良、山本俊彦：RCラーメンに支持された連続PCスラブの力学性状について、日本建築学会北海道支部研究報告集、No.63,1990,3。
- 6) 戸川華人：有限要素法概論、培風館、1990。
- 7) Esmond C. Chan: Nonlinear Geometric, Material and Time Dependent Analysis of Reinforced Concrete shells with Edge Beams, Ph.D. dissertation, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, UCB/SESM Report No.82/8, December, 1982, 1982。
- 8) 松倉満智子、上田正生、山本俊彦、土橋山造：周辺梁を有する床スラブ構造における梁・スラブ接合部の力学モデルに関する一考察、日本建築学会大会学術講演梗概集(北陸)、1992.8。
- 9) 上田正生：曲線テンドンを有するプレストレストコンクリートスラブの基礎微分方程式と有限要素法による数値計算例、コンクリート工学論文集、Vol.2, No.2, 1991,7。
- 10) F.R. Hand, D.A. Pecknold, W.C. Schnobrich: Nonlinear analysis of R.C. plates and shells, ASCE, Vol.1.99, ST7, 1973。
- 11) C.S. Lin, A.C. Schordelis: Nonlinear analysis of r.c. shells of general form, ASXE, Vol.1.101, ST3, 1975。
- 12) 日本建築学会：プレストレストコンクリート設計・施工規準・同解説、1987。