

(50) 追加打設面のすべりを考慮したプレキャストPC合成梁の解析法に関する研究

北海道大学工学部 正会員 〇上田 正生
 北海道大学工学部 内山 武司
 北海道職業能力開発短大 和田 俊良

1. はじめに

近年、半製品であるハーフ・プレキャスト(以下Pcaと略記)コンクリート部材を現場で組み立てた後、コンクリートを追加打設して施工されるコンクリート構造が急増しているのは、周知のとおりである。しかし、このようにして作られた個々の構造部材は、打ち継ぎ面を境としてプレキャスト部分と後打ち部分の材質が異なる合成構造であるにも拘わらず、力学的には一体構造として取り扱われるのが一般的である。

著者らはこれまでに、一体打ちされたコンクリート構造部材を対象にして、補強材の付着すべりを考慮した場合の曲げについて論じてきたが、この度、補強材のすべりのみならず、コンクリート打ち継ぎ境界面の付着すべりを考慮した場合のプレキャストPC合成梁部材のための新たな有限要素を開発したので、本論文ではその定式化の概要について記述し、併せて若干の数値計算例を示すこととする。

2. 基本仮定事項

プレキャスト部分と後打ちコンクリート間の付着すべりと補強材の付着すべりを考慮した、RC梁部材の曲げ問題を定式化するにあたって用いた基本仮定事項を以下に掲げる。

(1) 梁には鉛直荷重と軸方向荷重(プレストレスを含む)が作用するものとし、微小変形理論が適用できるものとする。

(2) プレキャスト部と後打ちコンクリート部の断面は同一曲率を有し、それぞれ平面保持の仮定が成立するものとする。

(3) プレキャスト部分と後打ち部のコンクリート間には付着すべりが生じるものとし、この付着境界に生じる付着応力 τ_h とすべり変位 h の間には次式の線形関係が成立する。

$$\tau_h = K_h h \quad (1)$$

但し、 K_h : 打ち継ぎ面の単位表面積当りの付着係数

(4) 補強材は全断面内に材軸に平行に m 層配置されており、これらのうちの $1 \sim k$ 層までがプレキャスト断面内に、また $k+1 \sim m$ 層までが後打ちコンクリート断面内に存在するものとし、これらの補強材とコンクリートの間には配筋方向の付着すべりが生じ、任意の i 層の補強材層のすべり変位 S_i は、平面が保持されるコンクリート部分からの相対すべり変位で表示され、また付着応力 τ_{bi} とすべり変位 S_i の間には、次式の線形関係が成り立つものとする。

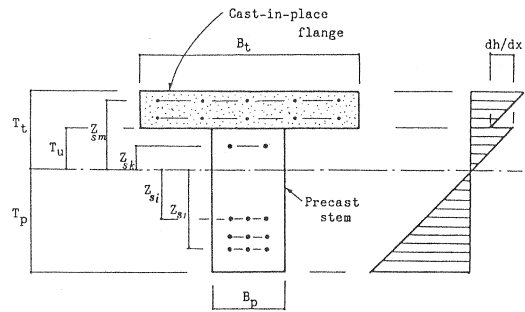
$$\tau_{bi} = K_{bi} S_i \quad (2)$$

但し、 K_{bi} : 任意の i 層の補強材とコンクリート間の単位付着表面積あたりの付着係数

3. 変位場および歪と応力

3.1 変位場

この問題を定式化するために導入される変位場は、梁の基準軸上の材軸方向の変位 u と z 軸方向の



(a) 断面記号 (b) 歪分布

図1 断面記号と仮定歪分布

変位 w 、およびプレキャスト部と後打ちコンクリート部の境界に生じるすべり変位 h 、そして全部材断面内に配置されている m 個の補強材層のすべり変位 $S_i \sim S_m$ の計 $(3+m)$ の変位置量である。

3. 2 コンクリート部分の歪と応力

(1) プレキャスト部分

梁の基準軸 (x 軸) から z だけ離れたプレキャスト部分のコンクリートの任意点におけるコンクリートの歪 ${}_p\epsilon_c$ は、次のように表示される。

$${}_p\epsilon_c = \epsilon_0 + z\phi \quad (3)$$

上式中の ϵ_0 と ϕ は、梁の軸歪と曲率で、下式で表わされる。

$$\epsilon_0 = \frac{du}{dx} \quad (4)$$

$$\phi = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (5)$$

従って、同位置のコンクリートの応力 ${}_p\sigma_c$ は、次のように表わされる。

$${}_p\sigma_c = {}_pE_c {}_p\epsilon_c = {}_pE_c \left(\frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} \right) \quad (6)$$

但し、 ${}_pE_c$: プレキャスト部分のコンクリートのヤング係数

(2) 後打ちコンクリート部分

基準軸から z だけ離れた、後打ちコンクリート部分の任意位置におけるコンクリートの歪 ${}_t\epsilon_c$ は、次のように表わすことが出来る。

$${}_t\epsilon_c = \epsilon_0 + z\phi + \epsilon_h \quad (7)$$

上式中の ϵ_h はプレキャスト部と後打ちコンクリート部の境界のすべり率であるから、下式のように表示される。

$$\epsilon_h = \frac{dh}{dx} \quad (8)$$

従って、同位置のコンクリートの応力 ${}_t\sigma_c$ は、下式で与えられる。

$${}_t\sigma_c = {}_tE_c {}_t\epsilon_c = {}_tE_c \left(\frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{dh}{dx} \right) \quad (9)$$

3. 3 補強材の歪と応力

(1) プレキャスト部断面内の補強材の歪と応力

プレキャスト部断面内にある $i = 1 \sim k$ 層の補強材の任意の i 層の歪 ${}_p\epsilon_{si}$ は、既報の RC 梁の場合と同様次ぎのように表わされる。

$${}_p\epsilon_{si} = \epsilon_0 + z_{si} \phi + \epsilon_{ssi} \quad (10)$$

但し、 z_{si} : 基準軸から i 層の補強材までの距離

上式中の ϵ_{ssi} は、この層の補強材のすべり率であるから、下式で与えられる。

$$\epsilon_{ssi} = \frac{dS_i}{dx} \quad (11)$$

従って、同補強材層 i の応力 $p\sigma_{si}$ は、次のように表示される。

$$p\sigma_{si} = E_{si} p\epsilon_{si} = E_{si} \left(\frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{dS_i}{dx} \right) \quad (12)$$

但し、 E_{si} : i 層の補強材のヤング係数

(2) 後打ちコンクリート断面内の補強材層の歪と応力

後打ちコンクリート断面内にある $i = k+1 \sim m$ 層の補強材の任意の i 層の歪 $t\epsilon_{si}$ は、打ち継ぎ境界面のすべりの影響を加算しなければならぬから、次のように表示される。

$$t\epsilon_{si} = \epsilon_0 + z_{si} \phi + \epsilon_h + \epsilon_{ssi} \quad (13)$$

従って、後打ちコンクリート断面内にあるこの補強材層の応力 $t\sigma_{si}$ は、打ち継ぎ境界面の効果をも含めて下式のようになる。

$$t\sigma_{si} = E_{si} t\epsilon_{si} = E_{si} \left(\frac{du}{dx} - z \frac{d^2w}{dx^2} + \frac{dh}{dx} + \frac{dS_i}{dx} \right) \quad (14)$$

4. 軸力、曲げモーメント、及びせん断力

前節の関係式を用いると、この部材断面の軸力 N と曲げモーメント M はそれぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned} N = & \left(B_t (T_t - T_u)_t E_c + B_p (T_p + T_u)_p E_c + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} \right) \frac{du}{dx} \\ & - \left(\frac{B_t t E_c (T_u^2 - T_t^2)}{2} + \frac{B_p p E_c (T_p^2 - T_u^2)}{2} + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} z_{si} \right) \frac{d^2w}{dx^2} \\ & + \left(B_t (T_t - T_u)_t E_c + \sum_{i=k+1}^m A_{si}^* E_{si} \right) \frac{dh}{dx} + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} \frac{dS_i}{dx} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} M = & \left(\frac{B_t t E_c (T_u^2 - T_t^2)}{2} + \frac{B_p p E_c (T_p^2 - T_u^2)}{2} + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} z_{si} \right) \frac{du}{dx} \\ & - \left(\frac{B_t t E_c (T_t^3 - T_u^3)}{3} + \frac{B_p p E_c (T_p^3 + T_u^3)}{3} + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} z_{si}^2 \right) \frac{d^2w}{dx^2} \\ & + \left(\frac{B_t t E_c (T_u^2 - T_t^2)}{2} + \sum_{i=k+1}^m A_{si}^* E_{si} z_{si} \right) \frac{dh}{dx} + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} z_{si} \frac{dS_i}{dx} \end{aligned} \quad (16)$$

但し、 A_{si} : 補強材層 i の断面積、 A_{si}^* : 補強材 i 層の換算断面積で、この層がプレキャスト部分にある場合は、 $A_{si}^* = A_{si} (1 - \frac{v E_c}{E_{si}})$ 、後打ち断面内にある場合は、 $A_{si}^* = A_{si} (1 - \frac{t E_c}{E_{si}})$ となる。

従って、プレキャストPC合成梁部材のせん断力 Q は下式で表示される。

$$\begin{aligned}
 Q = & \left(\frac{B_{lt} E_c (T_u^2 - T_t^2)}{2} + \frac{B_{pp} E_c (T_p^2 - T_u^2)}{2} + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} z_{si} \right) \frac{d^2 u}{dx^2} \\
 & - \left(\frac{B_{lt} E_c (T_t^3 - T_u^3)}{3} + \frac{B_{pp} E_c (T_p^3 + T_u^3)}{3} + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} z_{si}^2 \right) \frac{d^3 w}{dx^3} \\
 & + \left(\frac{B_{lt} E_c (T_u^2 - T_t^2)}{2} + \sum_{i=k+1}^m A_{si}^* E_{si} z_{si} \right) \frac{d^2 h}{dx^2} + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} z_{si} \frac{d^2 S_i}{dx^2} \quad (17)
 \end{aligned}$$

5. 全ポテンシャル・エネルギー汎関数

プレキャスト部分を有するこのRC梁部材の全ポテンシャル・エネルギー汎関数は、次のように書くことができる。

$$\Pi = U - V = (U_{cn} + U_{st} + U_h + U_{bs}) - V \quad (18)$$

但し、 U : 内部エネルギー、 v : 外力による負荷ポテンシャル・エネルギー

上式の内部エネルギー U を構成する右辺の各成分の打ち、 U_{cn} と U_{st} は、それぞれコンクリート部分と補強材自身に蓄積される歪エネルギーの総和であり、 U_h はプレキャスト部分と後打ちコンクリート部の境界に生じる付着に関わるエネルギーを、また U_{bs} は補強材とコンクリートの付着すべりに関わるエネルギーの総和を表わしている。これらのうち U_{cn} と U_{st} は、それぞれ次のように表示することができる。

$$U_{cn} = {}_p U_{cn} + {}_t U_{cn} \quad (19)$$

$$U_{st} = {}_p U_{st} + {}_t U_{st} \quad (20)$$

上2式の右辺の各項の下付前添え字 p と t は、各々それぞれがプレキャスト断面と後打ち断面に関する量であることを意味しており、これらの各項は次のように表わされる。

$${}_p U_{cn} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-T_u}^{T_p} B_p {}_p \epsilon_c^2 dz dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left(\sum_{i=1}^k A_{si} {}_p E_c {}_p \epsilon_{c,si}^2 \right) dx \quad (21)$$

但し、 B_p : プレキャスト断面の梁幅、 A_{si} : i 層の補強材の断面積、 ${}_p \epsilon_{c,si}$: プレキャスト断面内にある i 層の補強材位置に相当するコンクリートの歪、 T_u, T_p : 図1参照

$${}_t U_{cn} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-T_t}^{-T_u} B_t {}_t \epsilon_c^2 dz dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left(\sum_{i=k+1}^m A_{si} {}_t E_c {}_t \epsilon_{c,si}^2 \right) dx \quad (22)$$

但し、 B_t : 後打ちコンクリート断面の幅、 ${}_t \epsilon_{c,si}$: 後打ちコンクリート断面内にある i 層の補強材位置に相当するコンクリートの歪

$${}_p U_{st} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\sum_{i=1}^k A_{si} E_{si} {}_p \epsilon_{s,i}^2 \right) dx \quad (23)$$

$${}_t U_{st} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\sum_{i=k+1}^m A_{si} E_{si} {}_t \epsilon_{s,i}^2 \right) dx \quad (24)$$

また、打ち継ぎ境界面の付着と全補強材層の付着に関わるエネルギー U_h と U_{bs} は、それぞれ次のように書くことができる。

$$U_h = \frac{1}{2} \int_0^L (B_p K_h h^2) dx \quad (25)$$

$$U_{bs} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(\sum_{i=1}^m A_{bsi} K_{bi} S_i^2 \right) dx \quad (26)$$

但し、 A_{bsi} : 任意の i 層の補強材の付着表面積

従って、鉛直方向の荷重のみが作用する場合のこの梁部材のための全ポテンシャル・エネルギー汎関数は、最終的に次のように表示される。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ {}_p E_c B_p (T_p + T_u) + {}_t E_c B_t (T_t - T_u) + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} \right\} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \\ & - \left\{ {}_p E_c B_p (T_p^2 - T_u^2) + {}_t E_c B_t (T_t^2 - T_u^2) + 2 \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} z_{si} \right\} \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \\ & + 2 \left\{ {}_t E_c B_t (T_t - T_u) + \sum_{i=k+1}^m A_{si}^* E_{si} \right\} \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{dh}{dx} \right) + 2 \sum_{i=1}^m (A_{si} E_{si}) \left(\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{dS_i}{dx} \right) \\ & + \left\{ \frac{{}_p E_c B_p (T_p^3 + T_u^3)}{3} + \frac{{}_t E_c B_t (T_t^3 - T_u^3)}{3} + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} z_{si}^2 \right\} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \\ & - \left\{ {}_t E_c B_t (T_t^2 - T_u^2) + 2 \sum_{i=k+1}^m A_{si}^* E_{si} z_{si} \right\} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \left(\frac{dh}{dx} \right) - 2 \sum_{i=1}^m A_{si} z_{si} \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) \left(\frac{dS_i}{dx} \right) \\ & + \left\{ {}_t E_c B_t (T_t - T_u) + \sum_{i=k+1}^m A_{si}^* E_{si} \right\} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + B_p K_h h^2 + 2 \sum_{i=k+1}^m A_{si} E_{si} \left(\frac{dh}{dx} \right) \left(\frac{dS_i}{dx} \right) \\ & + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} \left(\frac{dS_i}{dx} \right)^2 + \sum_{i=1}^m A_{bsi} K_{bi} S_i^2 \Bigg\} dx - \int_0^L q w dx \quad (27) \end{aligned}$$

但し、 q : 梁に作用する鉛直外荷重

6. 有限要素法への定式化

(1) 変位関数

定式化に必要な変位置量 $u, w, h, S_i (i = 1 \sim m)$ の変位関数は、それぞれ以下のように仮定するものと

$$u = [1 \ x] \{ \alpha_{u0} \ \alpha_{u1} \}^T = [f_u] \{ \alpha_u \} \quad (28)$$

$$w = [1 \ x \ x^2 \ x^3] \{ \alpha_{w0} \ \alpha_{w1} \ \alpha_{w2} \ \alpha_{w3} \}^T = [f_w] \{ \alpha_w \} \quad (29)$$

$$h = [1 \ x] \{ \alpha_{h0} \ \alpha_{h1} \}^T = [f_h] \{ \alpha_h \} \quad (30)$$

$$S_i = [1 \ x] \{ \alpha_{S0} \ \alpha_{S1} \}^T = [f_S] \{ \alpha_S \} \quad (31)$$

但し、 $\{ \alpha_u \}, \{ \alpha_w \}, \{ \alpha_h \}, \{ \alpha_S \}$: それぞれ変位 $u, w, h, S_i (i = 1 \sim m)$ に対応する一般化変位

(2) 有限要素方程式

上で設定した変位関数と全節で導いた全ポテンシャル・エネルギー汎関数を用いて定式化を行うと、打ち継ぎ面の付着すべりを考慮した場合のRC梁の有限要素方程式が得られ下式となる。

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{uh} & K_{uS} \\ K_{uw}^T & K_{ww} & K_{wh} & K_{wS} \\ K_{uh}^T & K_{wh}^T & K_{hh} & K_{hS} \\ K_{uS}^T & K_{wS}^T & K_{hS}^T & K_{SS} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_u \\ \delta_w \\ \delta_h \\ \delta_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_u \\ P_w \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

但し、 $\{\delta_u\}, \{\delta_w\}, \{\delta_h\}, \{\delta_S\}$: それぞれ変位 u, w, h と全ての補強材のすべり変位 S に関する節点変位ベクトル

7. 数値計算例

本報告で提案し展開した解析法による数値計算例を示すために、図2に掲げるような断面形状を有するプレキャストPC部材を用いて製作されるスパン18mの単純支持・合成断面梁の計算を行うことにする。図からも知り得るように、この梁はポストテンション方式によってプレストレス力(導入時2450kN)が導入されたプレキャスト部分に、トップ

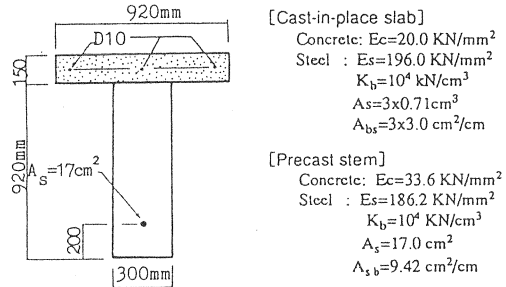


図2 モデル合成梁の断面寸度と仮定材料性状

スラブが追加打設されて完成されるものとする。解析は先ず、コンクリート打継ぎ面の付着すべりの影響をみるため K_h の値のみを変化させ、合成断面梁が live load 18kN/m を担う場合対象に行ってみる。図3は、 $K_h = 10^{-3} \sim 10^7 N/cm^3$ までの10段階の値に対する梁中央点の撓み W_c の推移状況を示したもので、図4は、 $K_h = 10^{-2}, 10, 10^2, 10^3, 10^5$ の場合を例にとって、梁中央断面の歪分布の変化を図示したものである。両図の結果より、この計算例では、 K_h が 10^4 以上では略完全付着状態に、また 1.0 以下の範囲では略完全アンボンドの状態に対応する」ことを読み取ることができる。図5には今一つの計算例として、 $K_h = 10^5 N/cm^3$ の場合を仮定し、A) プレキャスト部分にプレストレス力(有効プレストレス力として2150kNを仮定)と自重(プレキャスト部分のみの)が作用する場合、B) それにトップスラブ(但し、未硬化とする)の重量が加わった場合、C) トップスラブが硬化し合成断面梁として更に live

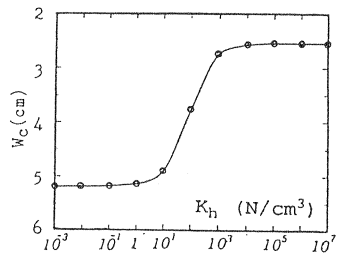


図3 K_h の変化に伴う live load 作用時の合成梁中央点変位の推移

load を受ける場合、の3段階に渡る梁中央断面の歪み分布の変遷を例示して掲げてある。

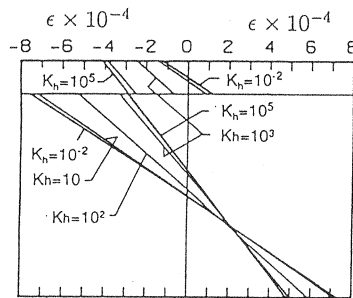


図4 K_h の変化に伴う live load 作用時の合成梁中央断面の歪分布の推移

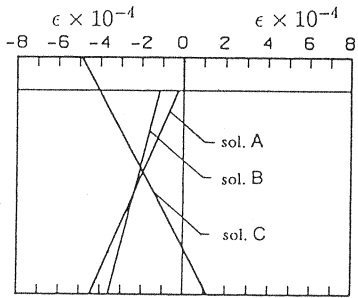


図5 施工段階の変化に伴う梁中央断面の歪分布の推移

8. まとめ

本論文では、プレキャストPC部材にコンクリートを追加打設して製作される合成梁の打ち継ぎ境界面の付着すべりを考慮した場合の「新しい有限要素」を開発して若干の数値計算例を掲げ、その有用性を明らかにしたが、本解析法は、コンクリート構造のみならず、鋼や木材など接着材で接合された積層材の曲げの問題にも容易に適用し得る広い応用性をもっている。これらの応用問題については今後順次研究を進めていく所存である。

【参考文献】 1) T.Y. Lin and Ned H. Burns; Design of prestressed concrete structures, John Wiley & Sons, 1982.