

(89) カテナリ-理論で計算した吊り床版橋の架設段階毎の形状

(株)ピー・エス九州支店 会員○前田文男  
 同上 土木技術部 会員 久保明英

1. まえがき

吊り床版橋は、一定区間に渡したケーブルに床版を取り付け、これを通路とした吊り橋である。吊り床版橋の架設では、まず1次ケーブルを渡し、次に長さ2~3mの床版部材を通し、ケーブル上を転がせて所定の位置まで移動させて配置する。これら床版部材は片側から順に並べられるのが一般的である。床版部材が縦て配置された段階で、床版部材どうしの接続部を間詰めし、また1次ケーブルを埋設する。その後、床版に2次ケーブルを通し、これを緊張して床版にプレストレスを導入し、橋体構造を完成させる。この間、架設段階によって1次ケーブルの張力、形状は変化する。

床版部材を1次ケーブルに通して並べただけの構造は、部材どうしの結合が無いため‘吊り構造’として扱うことができる。吊り構造では、僅かの荷重の変化で、張力と変形が大きく、また非線形に変わるため注意が必要である。本稿では、支間150mの吊り床版橋を例に、架設段階毎のケーブル張力、形状を計算し資料として示す。対象とした仮想の吊り床版橋の構造を図-1に示す。

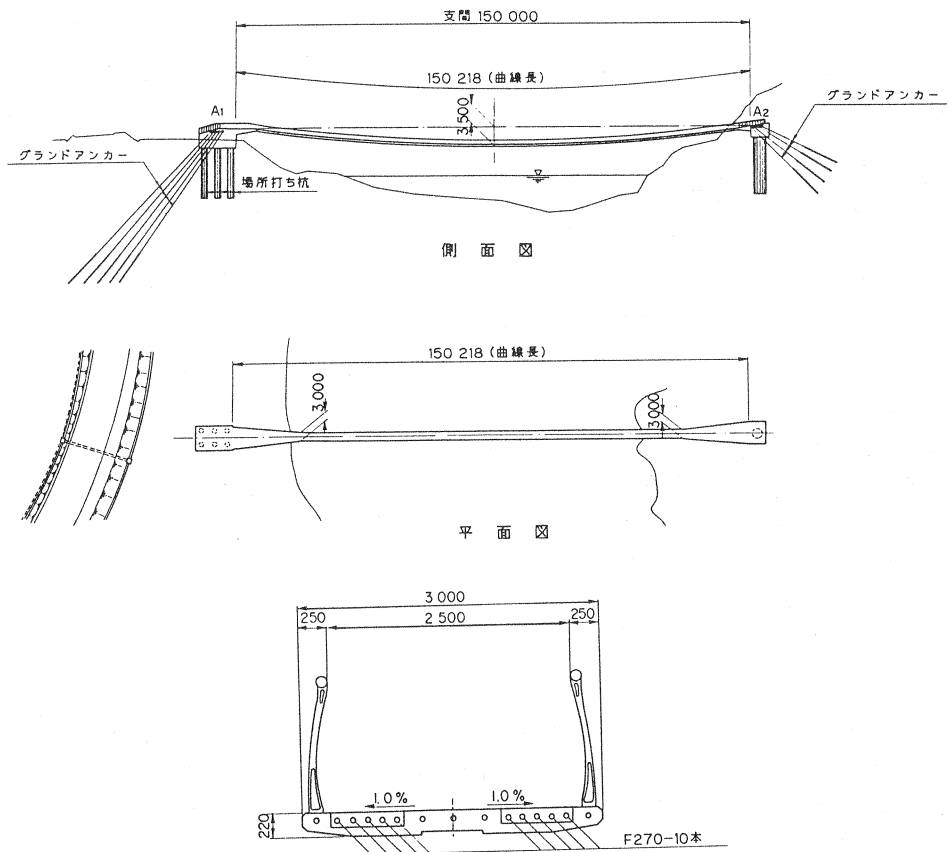


図-1 吊り床版橋の構造

## 2. 解析方法

### 2-1 解析方法

ケーブルは本質的に不安定な構造であり、一つの構造すなわちケーブル長とその区間割りが与えられれば、一つの荷重に対しこれとつり合い可能な形状が一つ定まる。そして、つり合い状態にある吊り構造は、荷重分布が変わると、これとつり合い可能な新しい形状にまで自らを変形させる性質がある。また、つり合い状態にある吊り構造には張力による初期応力剛性が存在するから、荷重変動に対する形状変化の量を抑えることができる。

吊り構造の解析は、荷重を与えたときに形成される形状を定める“形状解析”と、つり合い状態にある完成した吊り構造に外力が作用した場合の変形と応力変動を求める“変形解析”に大別される。いずれの場合も、仮定形状あるいは初期形状からの節点変位はきわめて大きいものとなり、典型的な幾何学的非線形問題となる。

### 2-2 カテナリー曲線の式

一区間のケーブル形状で議論する。カテナリー曲線はケーブル長をS、水平支間をL、鉛直支間をDとする時、長さの次元を持つパラメータ $\kappa$ を使うと次の(式2.1)、(式2.2)の関係がある。

$$\frac{\sinh \xi}{\xi} = \frac{\sqrt{S^2 - D^2}}{L} = 1 + \frac{\xi^2}{3!} + \frac{\xi^4}{5!} + \frac{\xi^6}{7!} + \dots \quad \text{-----(式2.1)}$$

$$\xi = \frac{L}{2\kappa} \quad \text{-----(式2.2)}$$

ケーブル形状は定数 $C_x$ 、 $C_y$ を用いて(式2.3)で表せる。また、ケーブルの傾き $\dot{Y}$ は(式2.4)で表せる。なお、定数 $C_x$ 、 $C_y$ はケーブル両端の座標を(式2.3)に代入し、2元連立方程式を解くことで計算できる。

$$\frac{Y + C_y}{\kappa} = c o s h \left( \frac{X + C_x}{\kappa} \right) \quad \text{-----(式2.3)}$$

$$\dot{Y} = s i n h \left( \frac{X + C_x}{\kappa} \right) \quad \text{-----(式2.4)}$$

S、L、Dが与えられれば(式2.1)(式2.2)から $\xi$ 、そして $\kappa$ が計算でき、ケーブルの形状が定まる。そして、ケーブルの形状が定まれば、ケーブル支持点の力のつり合いから支持点のケーブル張力の水平分力H、また鉛直分力Vが定まり、ケーブル張力Tも定まる。荷重がケーブル自重だけの場合のH、V、Tは次の(式2.5)、(式2.6)、(式2.7)となる。ここで、ケーブルの単位長さ当たりの重量をwとした。なお、本稿で示した資料は、(式2.1)の無限級数を $\xi^6$ までで使って近似している。

$$H = \kappa \cdot w \quad \text{-----(式2.5)}$$

$$V = H \cdot \dot{Y} = \kappa \cdot w \cdot \dot{Y} \quad \text{-----(式2.6)}$$

$$T = H \sqrt{1 + \dot{Y}^2} \quad \text{-----(式2.7)}$$

一般の吊り構造では、ケーブルの途中に集中荷重が載ったり、区間によってケーブル自重が異なったりする。複数のケーブル区間を有する吊り構造のつり合い形状を求めるには、個々の区間では前述のカテナリー曲線の式を適用し、区間-区間の接続点で力のつり合いを満足し、全体系において作用荷重と力のつり合い、またモーメントのつり合いを満足するように解く必要がある。

2-3 計算フロー

本稿の資料を計算したフローを図-2に示す。計算フローで、②カテナリー計算はプログラムを使用した。③判定は(式1)に基づいたS、Tの表をコンピュータ画面に映し出し、人間が行った。フローを5回程度繰り返すことで、本稿の数値を計算できた。平均張力Tは、ケーブル両端の張力と、接続点の張力を平均した値を用いた。

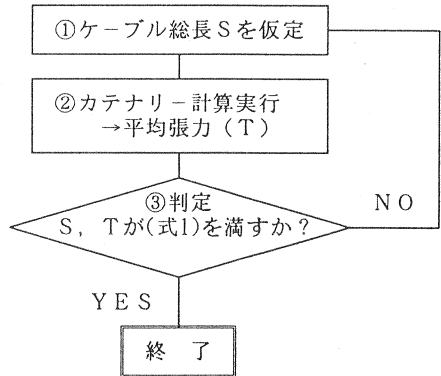


図-2 計算したフロー

3. 構造諸元

対象吊り床版橋は水平支間150m、総幅員3.0m、有効幅員2.5mで、0.2tf/m<sup>2</sup>の活荷重が載るものとする。両支点間に高低差は無いとした。設計条件を表-1に示す。床版コンクリートの設計基準強度は $\sigma_{ck} = 400 \text{ kgf/cm}^2$ 、ヤング係数は $E_c = 3.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ とした。橋体断面積は0.60m<sup>2</sup>、そして1次ケーブル埋設用切り欠き部の断面積を0.216m<sup>2</sup>としてプレキャスト床版部材の断面積を0.384m<sup>2</sup>とした。プレキャスト床版部材の長さを2.0mとし、およそ75個のブロックを並べると総長となる。コンクリートの単位体積重量は2.45tf/m<sup>3</sup>とする。

1次ケーブルとしてF270を10本、2次ケーブルとしてF270を5本使用する。F270の1ケーブルの断面積は14.1cm<sup>2</sup>、重量は11.78kgf/m、ヤング係数は $E_p = 20 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ である。計算に使用した完成橋体、プレキャスト床版部材、1次ケーブルの諸数値を次に示す。

橋体自重	: $w_d = 1.47$	(tf/m)
橋体断面積	: $A_d = 0.60$	(m <sup>2</sup> )
床版部材の重量	: $w_c = 0.9408$	(tf/m)
1次ケーブルの断面積	: $A_p = 0.0141$	(m <sup>2</sup> )
1次ケーブルの重量	: $w_p = 0.1178$	(tf/m)
活荷重	: $w_l = 0.50$	(tf/m)

表-1 設計条件

水平支間	150.0 m
鉛直支間	0.0 m
有効幅員	2.5 m
活荷重	0.2 tf/m <sup>2</sup>

4. 架設段階毎のケーブル張力および形状

4-1 1次ケーブル本数

(1) 完成時の張力

2次ケーブルを緊張する直前の状態、すなわち床版部材を総て配置し、接続部の間詰め、また1次ケーブルの埋設を終了した状態のたわみを $\delta_d = 3.5 \text{ m}$ とする。繰り返し計算により、荷重 $w_d$ を載せた時のたわみが3.500mとなるケーブル長S、そして1次ケーブルの張力 $T_1$ を計算した。

$$\begin{aligned}
 \text{EX01} \quad S &= 150.2175 \text{ (m)} \quad \rightarrow \quad T_1 = 1184.833 \text{ (tf)} \\
 w_d &= 1.47 \text{ (tf/m)} \quad \delta_d = -3.500 \text{ (m)}
 \end{aligned}$$

なお、さらに活荷重を載せるとたわみはこの状態より大きくなり、次に2次ケーブルを緊張するとたわみは小さくなる。ところで、活荷重により床版に生じる引張応力を打ち消す程の力で2次ケーブルを緊張するのが一般的であり、この場合たわみの増減は打ち消される。従って、2次ケーブルを緊張する直前のたわみ

は、活荷重を載せた状態のたわみとほぼ同じとなる。同様に、2次ケーブルを緊張する直前の1次ケーブル張力は、活荷重を載せた時の張力とほぼ同じとなる。この考えで、1184tfの張力に安全となるように、1次ケーブルとして10本のF270を使用することとした。

(2) ケーブル自重のみによる張力

1次ケーブルのケーブル長が $S = 150.2175$  mで、張力が $T_1 = 1184.833$  tfとなるには(式1)を満たす必要がある。(式1)を用いて無荷重状態の1次ケーブルの長さを計算すると $S_0 = 149.5890$  mとなる。

$$A_p \cdot E_p \cdot (S - S_0) / S_0 = T_1 \quad \text{-----(式1)}$$

無荷重状態で $S_0$ の長さの1次ケーブルを、水平支間150mに渡した状態で1次ケーブルの長さ $S$ 、張力 $T_1$ および中央のたわみ $\delta_a$ を計算すると下の様になる。

$$\begin{array}{l} \underline{EX00} \quad S = 150.0032 \text{ (m)} \quad \rightarrow \quad T_1 = 780.939 \text{ (tf)} \\ w_p = 0.1178 \text{ (tf/m)} \quad \delta_a = -0.424 \text{ (m)} \end{array}$$

4-2 架設段階毎のケーブル張力および形状

架設段階毎のケーブル張力を表-2(1)、(2)、形状を図-3に示す。なお、ケーブルの単位長さ当たりの重量として次の値を使っている。

$$\begin{array}{l} \text{床版部材を配置済みの部分の重量} : w_{p+c} = 1.0586 \text{ (tf/m)} \\ \text{1次ケーブルだけの部分の重量} : w_p = 0.1178 \text{ (tf/m)} \end{array}$$

4-3 2次ケーブルの緊張に伴う変形

2次ケーブルを緊張して床版にプレストレスを導入することを考える。床版にプレストレスを導入すると、床版長は短縮し、たわみは小さくなる。2次ケーブルを緊張すると、それまで1次ケーブルだけで受け持たれていた床版重量が、2次ケーブルによっても一部受け持たれることとなる。2次ケーブルの緊張力の約30%程度は、1次ケーブルに代わって床版重量の一部を支えるために費やされ、床版プレストレスとして効くのはその残りである。当然、2次ケーブルを緊張すると1次ケーブルの床版重量負担は軽減され、張力は減少する。

2次ケーブル緊張以前の吊り床版橋の軸線長は、EX01に示した様に150.2175mで、この時床版のプレストレスは零である。2次ケーブルを緊張して床版に $50.0 \text{ kgf/cm}^2$ のプレストレスを導入した場合のコンクリート床版軸線長( $S_{ca}$ )を計算すると、 $\Delta = -24.2$  mm短縮して次の値となる。

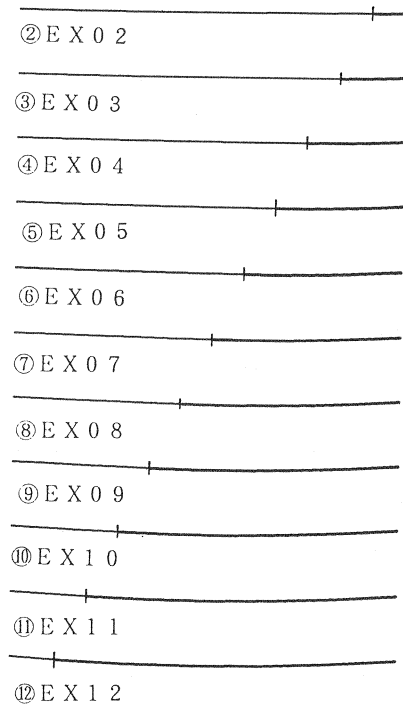


図-3 架設段階毎のケーブル形状

橋断面積 :  $A_c = 0.60 \text{ m}^2$   
 床版軸線長 :  $S_{ca} = 150.1933 \text{ m}$   
 橋体のヤング係数 :  $E_c = 3.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$

この状態でカテナリー方程式を解き、1次、2次ケーブルの張力の合計を計算すると、EX88となる。

$$\begin{aligned} \text{EX88} \quad S_{ca} &= 150.1933 \text{ (m)} \quad \rightarrow \quad T = T_1 + T_c = 1256.480 \text{ (tf)} \\ w_d &= 1.47 \quad \text{(tf/m)} \quad \delta_d = 3.299 \text{ (m)} \end{aligned}$$

ところで、EX88で1次ケーブルの長さは床版軸線長 $S_{ca}$ と同じであり、その時の1次ケーブルの張力は(式1)より $T_1 = 1139.200 \text{ tf}$ である。従って、コンクリートの分担張力は $T_c = 117.280 \text{ tf}$ であり、 $T_c$ が作用した状態で、 $50.0 \text{ kgf/cm}^2$ のプレストレスとするためには2次ケーブルの導入緊張力を $T_2 = 0.6 \text{ m}^2 \times 500 \text{ tf/m}^2 + T_c = 417.280 \text{ tf}$ とする必要がある。2次ケーブルとしてF270を5本使用することとする。

表-2(1) 架設段階毎のケーブル張力および形状

② 67°ロック (12m) EX02 S= 150.0045m T= 783.400tf	ケーブル長	m	138.0045 12.0		
	座標	m	X = 138.002, Y = -0.204		
	傾斜	rad	-0.0119	0.0089	0.0251
	張力	tf	782.83	782.81	783.02
	水平分力	tf	782.78		
③ 127°ロック (24m) EX03 S= 150.0094m T= 792.600tf	ケーブル長	m	126.0094 24.0		
	座標	m	X = 126.007, Y = -0.513		
	傾斜	rad	-0.0135	0.0053	0.0374
	張力	tf	791.13	791.07	791.62
	水平分力	tf	791.06		
④ 187°ロック (36m) EX04 S= 150.0185m T= 809.584tf	ケーブル長	m	114.0185 36.0		
	座標	m	X = 114.014, Y = -0.871		
	傾斜	rad	-0.0159	0.0007	0.0478
	張力	tf	809.22	809.12	810.04
	水平分力	tf	809.12		
⑤ 247°ロック (48m) EX05 S= 150.0315m T= 834.200tf	ケーブル長	m	102.0315 48.0		
	座標	m	X = 102.023, Y = -1.230		
	傾斜	rad	-0.0193	-0.0048	0.0561
	張力	tf	833.39	833.25	834.55
	水平分力	tf	833.24		
⑥ 307°ロック (60m) EX06 S= 150.0472m T= 863.800tf	ケーブル長	m	90.0472 60.0		
	座標	m	X = 90.033, Y = -1.544		
	傾斜	rad	-0.0233	-0.0110	0.0625
	張力	tf	863.70	863.52	865.15
	水平分力	tf	863.47		
⑦ 367°ロック (72m) EX07 S= 150.0645m T= 896.500tf	ケーブル長	m	78.0645 72.0		
	座標	m	X = 78.044, Y = -1.784		
	傾斜	rad	-0.0280	-0.0177	0.0673
	張力	tf	896.35	896.14	898.03
	水平分力	tf	896.00		

表-2(2) 架設段階毎のケーブル張力および形状

⑧ 427°ロック (84m) EX08 S= 150.0823m T= 930.000tf	ケーブル長	m	66.0823 84.0		
	座標	m	X = 66.054, Y = -1.924		
	傾斜	rad	-0.0333	-0.0249	0.0708
	張力	tf	929.08	928.85	930.89
	水平分力	tf	928.56		
⑨ 487°ロック (96m) EX09 S= 150.0993m T= 962.100tf	ケーブル長	m	54.0993 96.0		
	座標	m	X = 54.064, Y = -1.942		
	傾斜	rad	-0.0392	-0.0326	0.0732
	張力	tf	961.57	961.34	963.39
	水平分力	tf	960.83		
⑩ 547°ロック (108m) EX10 S= 150.1149m T= 991.333tf	ケーブル長	m	42.1149 108.0		
	座標	m	X = 42.075, Y = -1.824		
	傾斜	rad	-0.0458	-0.0408	0.0747
	張力	tf	990.83	990.62	992.55
	水平分力	tf	989.79		
⑪ 607°ロック (120m) EX11 S= 150.1280m T= 1016.407tf	ケーブル長	m	30.1280 120.0		
	座標	m	X = 30.088, Y = -1.547		
	傾斜	rad	-0.0532	-0.0497	0.0755
	張力	tf	1015.98	1015.80	1017.44
	水平分力	tf	1014.55		
⑫ 667°ロック (132m) EX12 S= 150.1380m T= 1034.850tf	ケーブル長	m	18.1380 132.0		
	座標	m	X = 18.105, Y = -1.093		
	傾斜	rad	-0.0614	-0.0594	0.0760
	張力	tf	1034.55	1034.42	1035.58
	水平分力	tf	1032.60		

吊り床版橋架設時のケーブル形状、張力を求める問題は、変形と張力がきわめて大きく変化し、また非線形に変化するもので、典型的な幾何学的非線形問題となる。表-2(2)の⑫EX12の場合を例として述べる。表中の床版部材が配置済みの右区間と配置されていない左区間の境界点の座標より計算した左の区間の直線距離は18.137962mであるが、ケーブル長を18.138mとした時の張力は302tf、ケーブル長を18.137965mとした時の張力は1115tfとなる。ケーブル長が僅か0.000035m変化するだけで張力が800tf程も変化し、また自重が作用した状態でケーブル長を直線距離と一致させようとするると張力は∞となる。なお、⑫EX12のつり合い状態では、ケーブル長18.137965・・mに対し、張力1034.49tfであるが、表中のケーブル長は少数点4位未満を四捨五入して少数点以下4位までの数字で示している。

4-4 活荷重を満載した時の変形

活荷重を満載した場合、床版軸線に沿って0.5tf/mの等分布荷重が加算され、コンクリート床版には、次に示すように計算上-48.3kgf/cm<sup>2</sup>の純引張応力が生じる。EX99に、2次ケーブルの緊張後の吊り床版橋に活荷重を満載した時の床版軸線長S<sub>a+1</sub>と床版に作用する張力Tを示す。

$$\begin{aligned} \text{有効幅員} \quad B &= 2.5 \quad (\text{m}) \\ \text{活荷重} \quad ww &= 0.2 \quad (\text{tf/m}^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{EX99} \quad S_{a+1} &= 150.2167 \quad (\text{m}) \quad \rightarrow \quad T = T_1 + T_c = 1590.800 \quad (\text{tf}) \\ w_{a+1} &= 1.97 \quad (\text{tf/m}) \quad \delta_a = 3.599 \quad (\text{m}) \end{aligned}$$

1次ケーブル張力

$$\begin{aligned} T_1 &= (150.2167 - 149.5890) / 149.5890 \times A_p \times E_p \\ &= 1183.318 \quad (\text{tf}) \end{aligned}$$

コンクリート張力

$$\begin{aligned} T_c &= (150.2167 - 150.1933) / 150.1933 \times A_c \times E_c + 117.280 \\ &= 289.787 + 117.280 = 407.067 \quad (\text{tf}) < T_2 = 417.280 \quad (\text{tf}) \end{aligned}$$

なお、コンクリート床版に作用する引張力は、2次ケーブルで導入した圧縮力より小さくなっており、活荷重満載状態においてもコンクリート床版に引張応力は生じない。活荷重載荷に伴うコンクリート応力増加量は次の様になる。

$$\Delta\sigma_c = -289.787 / 0.60 = -483 \quad (\text{tf/m}^2)$$

5. あとがき

ケーブル構造を解析する他の方法として、ケーブルを複数の直線トラス部材の結合として解析する方法がある。この方法の場合、精度確保のため十分な分割数をとる必要がある。本稿の方法では、区間内でカテナリー方程式を満足することは保証されており、区間接点と全体系における力のつり合い条件を満足させることで解を得ることができ、変数の数を少なくできる。本稿が床版橋の特性理解に参考となれば幸いである。

【参考文献】

1) 柴田, 山口, 牧野, 前田; 「PC吊床版橋「うさぎ橋」の設計と施工」, プレストレストコンクリート, Vol. 35, PP. 14~21, 1993年2月