

(104) 中間横桁のない非対称断面PC箱桁橋の計算

川田建設(株) 正会員 ○野田行衛  
九州工業大学 正会員 出光 隆

1. はじめに

PC箱桁橋の中間横桁の省略は、現場施工の急速化とコスト低減を可能にする。特にスパンが短く、径間数の多いPC橋においては大きな効果が期待できる。中間横桁を省略した場合に問題となるのは、偏心荷重による断面のゆがみ(以下断面変形)により生ずる軸方向応力と横方向の曲げであるが、対称断面を有するPC箱桁橋に関する断面変形の計算方法は、すでに文献1)に詳細に述べ、設計への適用例を示した。

断面変形の問題は、基本的には弾性支承上のはりの問題に置き換えることができ、対称断面の場合断面変形により生ずる軸方向応力と横方向の曲げモーメントを求める式は、比較的簡単な形で表すことが可能であった。

ここでは、前述の文献と同様に断面変形の問題を弾性支承上のはりとして解析する方法を拡張し、非対称断面箱桁橋の中間横桁を省略した場合の断面変形の計算方法について述べる。なお、ここで扱う非対称の箱断面は、左右の床版張り出し部の長さが異なるが、箱部分は一軸対称とし、左右のウェブは同一の寸法を有するものとする(図-1)。

2. 断面変形の計算方法

偏心荷重により非対称箱断面が断面変形を起こした場合を図-2に示す。断面変形による左右ウェブの鉛直たわみを  $W_{wl}$ ,  $W_{wr}$  とし、水平方向の変位を  $W_l$ ,  $W_u$  とする。

対称箱断面の場合と同様に非対称断面の断面変形理論式は、弾性支承上のはり理論式と等価であり、ウェブシャイベのたわみに着目すると、基本式は式(1)で表され、それぞれ左右のウェブに対して与えられる。

$$W^{IV}_w + 4\lambda^4 W_w = 4 \frac{\lambda^4}{K} P_w$$

ここに

$$\lambda = 4 \sqrt{\frac{K}{4EI_{si}}} \quad (1)$$

式中のKはラーメン剛性、 $I_{si}$ は仮想断面二次モーメント、Eはコンクリート弾性係数、 $P_w$ は断面変形荷重を表す。したがって、断面変形の問題を弾性支承上のはりとして解析するのに必要な物理量は、式(1)の断面変形荷重、仮想断面二次モーメント、ラーメン剛性である。以下では左右ウェブに着目し、これらを求める方法を示す。

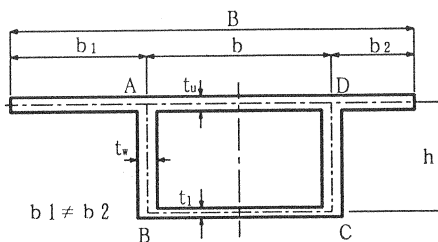


図-1 非対称箱桁断面および寸法

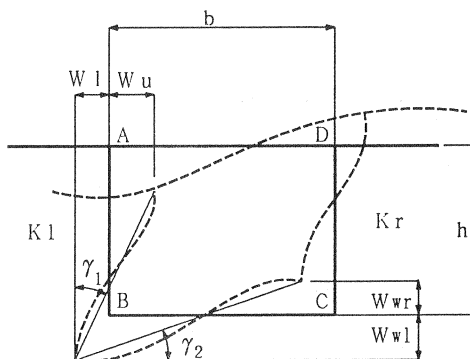


図-2 非対称箱桁断面における断面変形

(1) 応力分布と断面力

断面変形により各部材の節点に生じる軸方向応力をそれぞれ $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \sigma_D$ とすると、箱断面の応力分布は図-3のようになる。各シャイベを分解し、単独に取り出すと、各接合面には軸方向のせん断力 $T_A, T_B, T_C, T_D$ が作用し、また各シャイベには曲げモーメントが同時に作用している。上下床版の曲げモーメント $M_{0,u}, M_{0,l}$ とウェブの曲げモーメント $M_{0,w}$ の関係は、式(2)で与えられる。

$$M_{0,u} = M_{0,l} = \frac{b}{h} M_{0,w} \quad (2)$$

この関係を用いると、各シャイベの応力を求める式は式(3)にまとめることができる。ここで、これらの式中で使用されている $W_{w,i}$ は各シャイベの断面係数をあらわし、 $A$ は断面積、 $y_{i,i}$ は中立軸から縁までの距離をあらわす。

(注：右辺の $P_1=1, P_2=1$ の場合は除く)

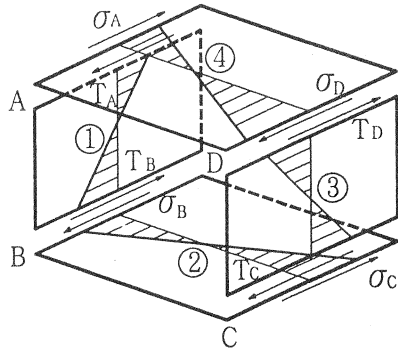


図-3 応力分布図

$P_1 = 1$  の場合     $P_2 = 1$  の場合

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -C_{w,1} & -C_{w,2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -C_{u,1} & 0 & 0 & -C_{u,2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -C_{w,3} & -C_{w,4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -C_{l,1} & -C_{l,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & C_{l,3} & C_{l,4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & C_{w,4} & C_{w,3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & C_{w,2} & C_{w,1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -C_{u,3} & 0 & 0 & -C_{u,4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sigma_A \\ \sigma_B \\ \sigma_C \\ \sigma_D \\ T_A \\ T_B \\ T_C \\ T_D \end{bmatrix}$	$= \begin{bmatrix} \frac{M_{0,w}}{w_{w,u}} \\ \frac{M_{0,w}}{w_{u,l}} \frac{b}{h} \\ \frac{M_{0,w}}{w_{w,l}} \\ \frac{M_{0,w}}{w_{u,l}} \frac{b}{h} \\ -\frac{M_{0,w}}{w_{l,r}} \frac{b}{h} \\ -\frac{M_{0,w}}{w_{w,l}} \\ \frac{M_{0,w}}{w_{w,u}} \\ -\frac{M_{0,w}}{w_{u,r}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1/W_{w,u} \\ 0 \\ 1/W_{w,l} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/W_{w,l} \\ -1/W_{w,u} \\ 0 \end{bmatrix}$
--	--	---

ただし、

$C_{w,1} = 1/A_w + y_{w,u}/W_{w,u}$	$C_{w,3} = 1/A_w - y_{w,l}/W_{w,l}$	$C_{l,3} = -1/A_l + y_{l,r}/W_{l,r}$
$C_{w,2} = -1/A_w + y_{w,l}/W_{w,u}$	$C_{w,4} = -1/A_w - y_{w,l}/W_{w,l}$	$C_{l,4} = 1/A_l + y_{l,l}/W_{l,r}$
$C_{u,1} = -1/A_u - y_{u,l}/W_{u,l}$	$C_{l,1} = 1/A_l + y_{l,l}/W_{l,1}$	$C_{u,3} = -1/A_u + y_{u,l}/W_{u,r}$
$C_{u,2} = 1/A_u - y_{u,r}/W_{u,l}$	$C_{l,2} = -1/A_l + y_{l,r}/W_{l,1}$	$C_{u,4} = 1/A_u + y_{u,r}/W_{u,r}$

(3)

(2) 仮想断面二次モーメントの計算

各シャイベには軸力と曲げモーメントが同時に作用するためシャイベの中心が中立軸とはならず、シャイベの応力がゼロとなる中立軸に関する断面二次モーメントをここでは仮想断面二次モーメントと呼ぶものとする。各シャイベをはりとして扱えば、左右ウェブの仮想断面二次モーメント $I_{s,l}, I_{s,r}$ は、曲率と曲げモー

ントの関係を利用することにより得られ、ウェブの高さを  $h$  とすると式(4)で表される。なお、式中の  $\bar{\sigma}_A \sim \bar{\sigma}_D$  は、 $M_{0,w} = 1$  の単位曲げモーメントが作用するときを生じる応力値を示す。

$$\begin{aligned} I_{si,l} &= h/(|\bar{\sigma}_A| + |\bar{\sigma}_B|) \\ I_{si,r} &= h/(|\bar{\sigma}_C| + |\bar{\sigma}_D|) \end{aligned} \quad (4)$$

したがって、ウェブの仮想断面二次モーメントを得るには、式(3)の8個の方程式を連立して解き、 $T_A \sim T_D$  および  $\sigma_A \sim \sigma_D$  を求める必要がある。

### (3) ラーメン剛性の計算

節点が剛接合された非対称箱断面に断面変形が生じた場合の変形状態を図-2に示すが、各シャイベの軸方向は、はりとしてのたわみが生じ、横方向はラーメンとしての変形が同時に生じる。

ここで、式(4)と同様に軸方向のはりの曲率と曲げモーメントの関係を利用し、さらに曲げモーメントとたわみとの関係を用いると、各シャイベのたわみとウェブたわみとの関係式が得られ、式(5)のようになる。

$$\begin{aligned} W_u &= \frac{M_u/I_{ui}}{M_{wl}/I_{si,l}} W_{wl} = \frac{h}{b} \frac{|\bar{\sigma}_A| + |\bar{\sigma}_D|}{|\bar{\sigma}_A| + |\bar{\sigma}_B|} W_{wl} \\ W_l &= \frac{M_l/I_{li}}{M_{wl}/I_{si,l}} W_{wl} = \frac{h}{b} \frac{|\bar{\sigma}_B| + |\bar{\sigma}_C|}{|\bar{\sigma}_A| + |\bar{\sigma}_B|} W_{wl} \\ W_{wr} &= \frac{M_{wr}/I_{si,r}}{M_{wl}/I_{si,l}} W_{wl} = \frac{|\bar{\sigma}_C| + |\bar{\sigma}_D|}{|\bar{\sigma}_A| + |\bar{\sigma}_B|} W_{wl} \end{aligned} \quad (5)$$

次に、部材回転角  $\gamma_1$  と  $\gamma_2$  の和を変形角  $\gamma$  とすると、変形角とたわみの関係式は式(5)を利用することにより式(6)が得られる。

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{W_u + W_l}{h} + \frac{1}{b} (W_{wl} + W_{wr}) \\ &= \frac{W_{wl}}{b} \left\{ \frac{2(|\bar{\sigma}_A| + |\bar{\sigma}_B| + |\bar{\sigma}_C| + |\bar{\sigma}_D|)}{|\bar{\sigma}_A| + |\bar{\sigma}_B|} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

左右ウェブのラーメン剛性  $K_l$  と  $K_r$  は、ウェブに単位荷重が作用したときのたわみの逆数で与えられ、ウェブに単位たわみを生じさせるときの荷重として定義される。

一方、単位荷重がウェブに作用したときのたわみ  $W_{wl}$  は、箱断面部分が一軸対称とした場合には図-4に示すような計算モデルから算出したウェブのたわみ  $\delta_{wl}$  と式(7)の関係がある。

$$\delta_{wl} = 1/2 W_{wl} \quad (7)$$

したがって、左右ウェブのラーメン剛性は、定義に従って式(8)で表される。

$$\begin{aligned} K_l &= \frac{1}{W_{wl}} = \frac{1}{2\delta_{wl}} \left\{ \frac{2(|\bar{\sigma}_A| + |\bar{\sigma}_B| + |\bar{\sigma}_C| + |\bar{\sigma}_D|)}{|\bar{\sigma}_A| + |\bar{\sigma}_B|} \right\} \\ K_r &= \frac{1}{W_{wr}} = \frac{|\bar{\sigma}_A| + |\bar{\sigma}_B|}{|\bar{\sigma}_C| + |\bar{\sigma}_D|} K_l \end{aligned} \quad (8)$$

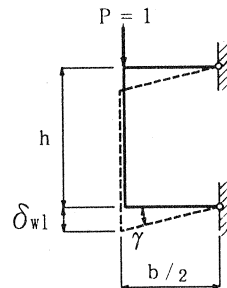


図-4 たわみ計算モデル

(4) 断面変形荷重

対称箱断面に偏心荷重が作用した場合の断面変形荷重は簡単に求めることができたが、非対称断面においては、重心とせん断中心が軸中心線上にないために簡単に決定することができない。

図-5は、左ウェブ上に荷重Pが載荷した場合の荷重の分解を示す。せん断中心Sは、荷重点からeの距離にあるものとし、ウェブ間隔はbとする。

図の荷重ケース①は、箱断面が対称な変形を起こす荷重で、 $P_1$  と  $P_2$  は、式(9)の条件から求められる。

$$P_1 + P_2 = P \quad (9.1)$$

$$(\gamma_1)_1 + (\gamma_1)_2 = 0 \quad (9.2)$$

式(9.2)の第1項は $P_1$ による変形角 $\gamma_1$ あらわし、第2項は $P_2$ による変形角 $\gamma_1$ をあらわす。すなわち、 $P_1$ と $P_2$ により箱断面には断面変形が生じないことを意味している。

荷重ケース②は、荷重ケース①の場合に付加的に生じるねじりモーメント $M_{t1}$ である。荷重ケース③は、全体のねじりモーメント $M_t$ からケース②の付加ねじりモーメントを除いたねじりモーメント $M_{t2}$ を生じさせる荷重を表す。これらを式で表すと式(10)のようになる。

$$\begin{aligned} M_{t1} &= P_1 e - P_2 (b-e) \\ M_{t2} &= M_t - M_{t1} \\ P_A &= -P_D = M_{t2}/b \end{aligned} \quad (10)$$

したがって、ウェブに作用する断面変形荷重 $P_w$ は、荷重ケース⑤に示すように、自己釣り合い状態を形成するため、式(11)となる。

$$P_w = P_A/2 = \frac{M_{t2}}{2b} \quad (11)$$

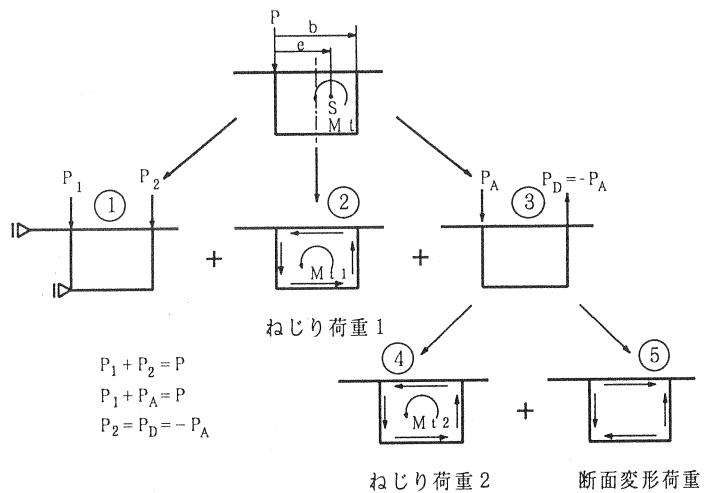


図-5 荷重の分解

荷重ケース①の $P_1$ と $P_2$ は、それぞれの単位荷重がウェブ上に単独に作用したときの変形角を求め、式(9.2)の条件からその比率を計算するが、そのときの変形角は右辺の項が式(3)における $P_1=1$ 、 $P_2=1$ の場合のマトリックス計算から応力値を求め、それらを式(6)に代入することにより得られる。

3. 非対称断面箱桁の計算例

図-6に示すように左右の張り出し床版の長さがそれぞれ3.5mと2.5mでウェブ間隔5m、桁高1.95mの箱桁の計算例を示す。箱桁のスパンは40mとし、スパン中央に100tfの荷重がウェブ上に作用しているもの

とする。

(1) 連立方程式の計算

式(3)から、各荷重条件下の $\sigma_A \sim \sigma_D$ と $T_A \sim T_D$ を計算する。解析結果を表-1に示すが、No.1は $P_1=1$ 、No.2は $P_2=1$ 、No.3は $M_{0,w}=1$ の場合を表す。

表-1 マトリックス計算

$\sigma_A$	$\sigma_B$	$\sigma_C$	$\sigma_D$	$T_A$	$T_B$	$T_C$	$T_D$
1	0	0	0	-5.128	-2.564	0	0
1	0	0	0	0.423	0	0	-0.123
0	1	0	0	2.564	5.128	0	0
0	1	0	0	0	-4	-2	0
0	0	1	0	0	2	4	0
0	0	1	0	0	0	-5.128	-2.564
0	0	0	1	0	0	2.564	5.128
0	0	0	1	0.123	0	0	-0.573

No.1	No.2	No.3
-3.945	0	-3.945
0	0	-0.1541
3.945	0	3.945
0	0	3.0769
0	0	-3.0769
0	3.945	-3.945
0	-3.945	3.945
0	0	0.2312

	No.1	No.2	No.3
$\sigma_A$	-0.2395	-0.0487	-0.3816
$\sigma_B$	0.99239	-0.2731	2.53098
$\sigma_C$	-0.269	1.0103	-2.5586
$\sigma_D$	-0.0446	-0.3161	0.54337
$T_A$	0.57963	-0.0482	0.74268
$T_B$	0.28597	0.07735	-0.0956
$T_C$	-0.0757	-0.2913	-0.0818
$T_D$	0.04657	-0.562	0.70423

+引張応力  
-圧縮応力

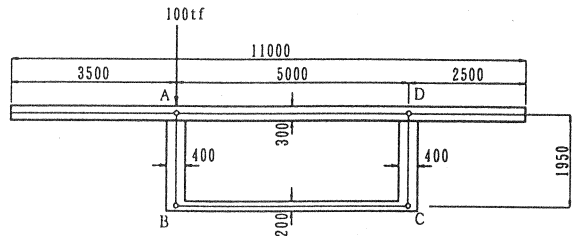


図-6 計算モデル

(2) 荷重の分解

左ウェブからのせん断中心の位置 $e=2.54m$ 、全体ねじりモーメント $M_t=100 \times 2.54=254tfm$

$P_1=1$ と $P_2=1$ による節点Aの変形角 $\gamma_{A,1}$ と $\gamma_{A,2}$ の値は、式(6)から次のようになる。

$$\gamma_{A,1} = 0.473W_{w,1}^1 \quad \gamma_{A,2} = 2.763W_{w,1}^2$$

$P_1$ と $P_2$ の比率は式(9.2)とたわみと応力の関係を用いると

$$f = \frac{P_2}{P_1} = 0.1712 \frac{W_{1,w,1}}{W_{2,w,1}} = 0.94$$

となる。

したがって、最終的に $P_2 = 0.94P_1$ から $P_1=51.55tf$ 、 $P_2=48.45tf$ となる(図-7)。次に荷重ケース②と③のねじりモーメントを計算する。

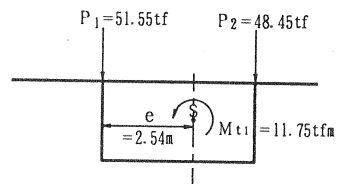


図-7 荷重の分解

$$M_{t1} = P_1 e - P_2 (b-e) = 11.75 tfm$$

$$M_{t2} = M_t - M_{t1} = 242.25 tfm$$

部材に作用する断面変形荷重は、式(11)から求める(図-8)。

$$P_w = \frac{M_{t2}}{2b} = 24.23 tf, \quad P_u = P_1 = 62.13 tf$$

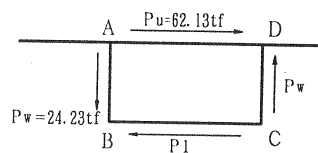


図-8 断面変形荷重

(3) 仮想断面二次モーメント

表-1のNo.3から求めた応力値を式(4)に代入すると次のようになる。

$$I_{si,l} = 0.669m^4 \quad (\text{左ウェブ})$$

$$I_{si,r} = 0.629m^4 \quad (\text{右ウェブ})$$

(4) ラーメン剛性

図-4の解析モデルから $\delta_{wl}$ を計算する。

$$\delta_{wl} = 0.000613m$$

次に表-1のNo.3から求めた応力値を式(6)に代入して、左右のラーメン剛性を計算すると

$$K_l = 3369tf/m/m$$

$$K_r = 3163tf/m/m$$

となる。

(5) 断面変形による応力

以上の計算結果から求めた定数を用いた弾性支承上のはりモデルを図-9に示す。これより左ウェブのスパン中央の荷重点位置の曲げモーメントは、解析結果から得られる。

$$M_{0,w} = 43.343tfm$$

また、ウェブの中立軸は、次式から求められる。

$$e_u = \frac{\sigma_A}{\sigma_A + \sigma_B} h = 0.255m, \quad e_l = 1.695m$$

荷重点位置の軸方向応力と横曲げモーメントは、文献1)から、

$$\sigma_{ul} = M_{0,w} e_u / I_{si} = 16.5tf/m^2 \quad \sigma_{ur} = -23.9tf/m^2$$

$$\sigma_{lr} = M_{0,w} e_l / I_{si} = -109.8tf/m^2 \quad \sigma_{lr} = 112.6tf/m^2$$

$$m_a = -m_d = 3.008tfm/m, \quad m_b = -m_c = -1.161tfm/m$$

となる。

図-10,11に軸方向応力分布図と横曲げモーメント分布図を示す。

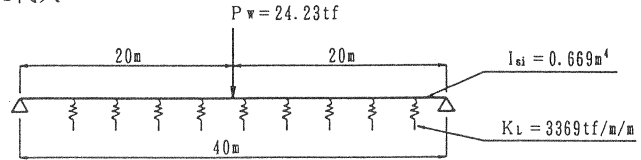


図-9 弾性支承上のはりモデル

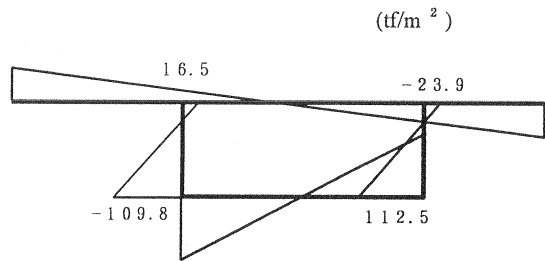


図-10 軸方向応力分布

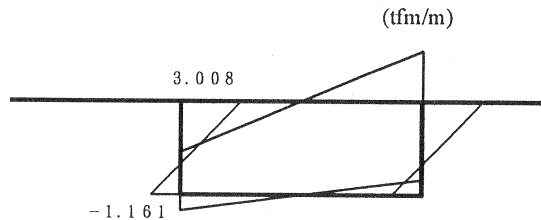


図-11 横曲げモーメント分布

4. まとめ

床版の張り出し長さが異なる非対称PC箱桁橋の断面変形の計算は、対称箱断面における断面変形理論を拡張することにより比較的簡単に行うことができることを示した。弾性支承上のはりとして解析するために必要な物理量は、いずれも単位荷重作用時の軸方向応力分布から求められ、特にラーメン剛性はウェブの対称性を条件に計算が単純化されることを示した。

参考文献

- 1) 野田, 出光: 中間横桁のないPC1室箱桁橋の設計法に関する研究, 土木学会論文集, No.514/V, 1995.5
- 2) Krebs, Lindlar: Zur Profilverformung einzelliger Kastenträger, Beton und Stahlbetonbau, Heft1, 1981.