

(107) プレストレストコンクリート構造の非線形解析における剛性の評価

横浜国立大学工学部 正会員 椿 龍哉

1. はじめに

プレストレストコンクリート (PC) 構造を棒部材として扱う場合の解析には、現在、はり理論に基づく方法が一般に用いられている [1,2]. 材料特性が非線形な場合には、それらはファイバーモデルと呼ばれる方法と等価であり、PC 構造の解析を簡便に行うためには有用かつ有効な手法であると考えられる。一方、通常のはり要素を用いた有限要素法による解析も一般に広く用いられている [3]. 本研究は、後者の方法を、ひび割れを許容する PC 構造を含めた解析のために、クリープ、乾燥収縮、非線形な応力ひずみ関係の影響、およびせん断の影響を考慮できる手法を検討した結果を報告するものである。

2. はり要素のモデル化

はりの断面の任意の点の変位は次のように与えられると仮定する。ただし、はりの断面の図心軸方向に x 軸、図心軸に直角下向きに z 軸をとる。

$$U = u(x) - z\theta(x); \quad V = 0; \quad W = w(x) \quad (1)$$

ここに、 u, w は図心軸上の点の x, z 軸方向の変位である。また、 θ は回転角を表し、次のように与えられる (図-1 参照)。

$$\theta = w'(x) + \gamma(x) \quad (2)$$

ここに、 $(\cdot)'$ はその関数の独立変数による微分を表す。したがって、 w' は図心軸の傾きを表す。また、 γ はせん断による回転角を表す。

軸ひずみ ϵ とせん断ひずみ γ は次のように与えられる。

$$\epsilon = \frac{\partial U}{\partial x} = u' + z\theta'; \quad \gamma = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} = -\theta + w' \quad (3)$$

式 (3) をマトリックス表示すると、次のようになる。

$$\epsilon = A\mathbf{u}; \quad \epsilon = [\epsilon, \gamma]^T; \quad \mathbf{u} = [u, w, \theta]^T; \quad A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -z\frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & -1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

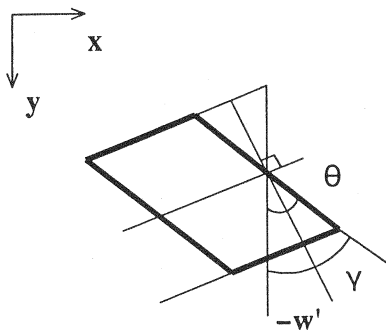


図-1 微小要素の変形

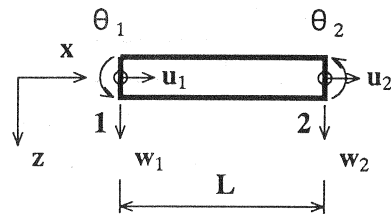


図-2 要素と節点変位

要素内の変位 u は節点変位 U と内挿関数 N により次のように表されるものとする (図-2 参照).

$$u = NU; \quad N = [N_u, N_w, N_\theta]^T; \quad U = [u_1, w_1, \theta_1, u_2, w_2, \theta_2]^T \quad (5)$$

ここに、内挿関数 N の成分は次のように与えられる.

$$N_u = [N_1, 0, 0, N_2, 0, 0]; \quad N_w = [0, N_1, 0, 0, N_2, 0]; \quad N_\theta = [0, 0, N_1, 0, 0, N_2] \quad (6)$$

$$N_1 = 1 - \xi; \quad N_2 = \xi; \quad \xi = \frac{x}{L} \quad (7)$$

これは、図心軸上の点の変位 u , w と回転角 θ が要素内で線形に変化することを意味する. また、回転角 θ は変位 w とは独立に与えられている. 以上より、ひずみ ϵ と節点変位 U の関係は次のようになる.

$$\epsilon = BU; \quad B = AN = \left[\frac{1}{L} N'_u - \frac{z}{L} N'_\theta, \frac{1}{L} N'_w - N_\theta \right]^T \quad (8)$$

応力 σ とひずみ ϵ の関係は、クリープ、乾燥収縮、ひび割れ等の影響を考慮するため、次のような非線形モデルで表されると仮定する.

$$\sigma = D(\epsilon - \epsilon_c) - \sigma_c \quad (9)$$

$$D = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}; \quad \epsilon_c = [\epsilon_c, \gamma_c]^T; \quad \sigma_c = [\sigma_c, \tau_c]^T \quad (10)$$

ここに、 E はヤング係数、 G はせん断弾性係数、 ϵ_c はクリープひずみ、乾燥収縮ひずみ、温度ひずみ等による非弾性ひずみ、 σ_c はひび割れや高応力に対する非線形性による非弾性応力である.

はり要素に関する仮想仕事の式は次のようになる.

$$\int_0^L \int_A \delta \epsilon^T \sigma dA dx = \delta U^T F + \int_0^L \delta u^T p dx \quad (11)$$

ここに、節点荷重 F 、および分布荷重 p は次のように与えられる (図-3 参照).

$$F = [f_{x1}, f_{z1}, m_1, f_{x2}, f_{z2}, m_2]^T; \quad p = [p_x, p_z, m]^T \quad (12)$$

p_x, p_z, m は要素に作用する x, z 方向の分布外力、および分布外力モーメントである. これらは、任意の表面力や体積力 (自重) 等を考慮する場合に用いられる.

式 (5), (8), (9) を式 (11) に代入すると、次の式が得られる.

$$KU = \bar{F}; \quad \bar{F} = F + F_p + F_c + F_\sigma \quad (13)$$

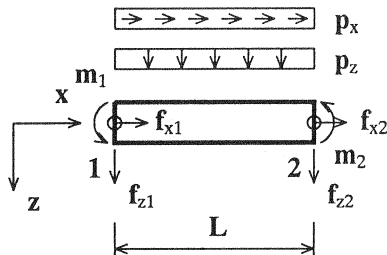


図-3 要素に作用する荷重

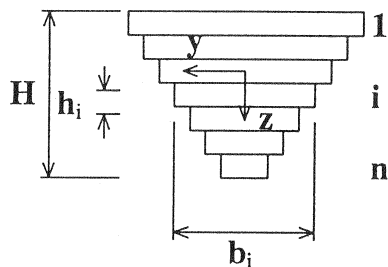


図-4 断面の分割

ここに、 \bar{F} は節点荷重, 要素に作用する分布荷重, 非弾性ひずみや非弾性応力による等価節点荷重を含む。また, 剛性マトリックス K は次のように表される。

$$K = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \alpha_{b1} & 0 & -\alpha_{b2} & -\alpha_{b1} & 0 & \alpha_{b2} \\ & \alpha_s & \frac{1}{2}L\alpha_s & 0 & -\alpha_s & \frac{1}{2}L\alpha_s \\ & & \frac{1}{3}L^2\alpha_s + \alpha_{b3} & \alpha_{b2} & -\frac{1}{2}L\alpha_s & \frac{1}{6}L^2\alpha_s - \alpha_{b3} \\ & & & \alpha_{b1} & 0 & -\alpha_{b2} \\ \text{Sym.} & & & & \alpha_s & -\frac{1}{2}L\alpha_s \\ & & & & & \frac{1}{3}L^2\alpha_s + \alpha_{b3} \end{bmatrix} \quad (14)$$

剛性マトリックス K に含まれる係数は以下のように定義される量である。

$$\alpha_{b1} = \int_A E dA; \quad \alpha_{b2} = \int_A E z dA; \quad \alpha_{b3} = \int_A E z^2 dA; \quad \alpha_s = \int_A G k A dA \quad (15)$$

α_{b1} は要素の軸方向剛性を表す。 α_{b2} は材料定数が非線形性のために断面内で不均一になったり, ひび割れが発生してコンクリート部分の剛性が変化する場合は影響を考慮するための係数である。弾性係数が断面内で一定で, 断面図心と z 軸原点が一致する場合はゼロになる。 α_{b3} は曲げ剛性を表す。 α_s はせん断に対する剛性である。 k はせん断に対する補正係数である。ここでは, E, G には要素中点の断面における値を用いる。

荷重に関する項は次のように与えられる。これらの項に含まれる断面に関する積分は, コンクリート部分と鋼材部分からなる与えられた断面を z 方向に層状に分割し, 各層の図心における材料定数等の値を用いて数値的に求める (図-4 参照)。要素に作用する分布荷重による荷重項 F_p は次のように与えられる。

$$F_p = \int_0^1 N^T p L d\xi \quad (16)$$

ここで用いている要素は線形要素なので, 分布荷重が一定の場合は, 両端の節点に全体量の半分を作用させればよい。したがって, F_p は次のようになる。

$$F_p = \left[\frac{1}{2} p_x L, \frac{1}{2} p_z L, \frac{1}{2} m L, \frac{1}{2} p_x L, \frac{1}{2} p_z L, \frac{1}{2} m L \right]^T \quad (17)$$

また, クリープや乾燥収縮による非弾性ひずみやひび割れなどの影響を表す非弾性応力による荷重項は次のようになる。なお, 弾性係数, 非弾性ひずみおよび非弾性応力の値には要素中点の断面における値を用いる。

$$\begin{aligned} F_\epsilon &= \int_0^1 [f_{\epsilon b1} N_u^T - f_{\epsilon b2} N_\theta^T + f_{\epsilon s} (N_w^T - L N_\theta^T)] d\xi \\ &= \left[-f_{\epsilon b1}, -f_{\epsilon s}, f_{\epsilon b2} - \frac{1}{2} f_{\epsilon s} L, f_{\epsilon b1}, f_{\epsilon s}, -f_{\epsilon b2} - \frac{1}{2} f_{\epsilon s} L \right]^T \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} F_\sigma &= \int_0^1 [f_{\sigma b1} N_u^T - f_{\sigma b2} N_\theta^T + f_{\sigma s} (N_w^T - L N_\theta^T)] d\xi \\ &= \left[-f_{\sigma b1}, -f_{\sigma s}, f_{\sigma b2} - \frac{1}{2} f_{\sigma s} L, f_{\sigma b1}, f_{\sigma s}, -f_{\sigma b2} - \frac{1}{2} f_{\sigma s} L \right]^T \end{aligned} \quad (19)$$

非弾性ひずみと非弾性応力による荷重項に含まれる係数は次のように定義される。

$$f_{\epsilon b1} = \int_A E \epsilon_c dA; \quad f_{\epsilon b2} = \int_A E \epsilon_c z dA; \quad f_{\epsilon s} = \int_A G \gamma_c dA \quad (20)$$

$$f_{\sigma b1} = \int_A \sigma_c dA; \quad f_{\sigma b2} = \int_A \sigma_c z dA; \quad f_{\sigma s} = \int_A \tau_c dA \quad (21)$$

これらの要素断面に関する積分は, 断面の各層の図心における $E, G, \epsilon_c, \gamma_c, \sigma_c, \tau_c$ の値を用いて数値的に計算する。

式 (13) の解は, 式 (13) を増分形式に変換し, 逐次積分法によって求められる。各荷重ステップでは繰返し計算を行うことによって精度を向上させることができる。荷重の増加にともない, 中立軸の位置が変化するが, この解析手法では図心の初期の位置を参照点としているため, 計算が容易である。

3. 数値計算例

幅 $b = 50$ cm, 高さ H の長方形断面を持つ長さ $L_1 = 500$ cm の単純ばりを考える。はり全体は等しい長さの 20 個の要素で分割される。荷重としてはスパン中央に集中荷重が作用する。ポアソン比は 0.2, また, せん断に対する補正係数は $k = 5/6$ である。はりの断面寸法とはりのスパンの比を表す H/L_1 をパラメータとして, 通常のはり要素を用いて得られる解との差を図-5 に示す。 w_m は本解析手法の剛性マトリックスを用いて得られるスパン中央のたわみ, w_{m0} はせん断を考慮した単位荷重の定理から求められるスパン中央のたわみである。 H/L_1 が小さい場合を除いて両者は良い一致を示している。また, H/L_1 が大きくなるとせん断の影響は顕著になることが確認される。

なお, この計算で用いられた剛性マトリックスは, ひび割れが発生する前の状態で断面内の材料定数が一定と仮定するため, 断面図心と z 軸原点が一致し, 次のようになる。また, クリーブの影響は有効弾性係数 [4] によって考慮されるものとする。

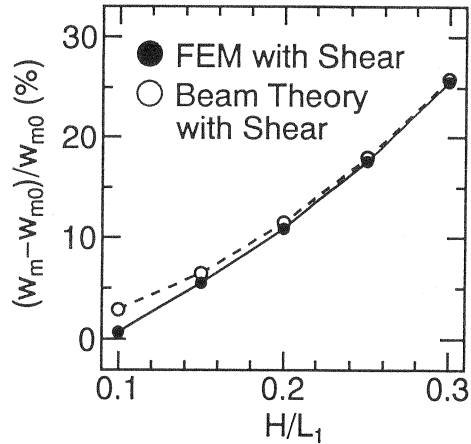


図-5 せん断変形の影響

$$K = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & -EA & 0 & 0 \\ & GkA & \frac{1}{2}LGkA & 0 & -GkA & \frac{1}{2}LGkA \\ & & \frac{1}{3}L^2GkA + EI & 0 & -\frac{1}{2}LGkA & \frac{1}{6}L^2GkA - EI \\ & & & EA & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & GkA & -\frac{1}{2}LGkA \\ & & & & & \frac{1}{3}L^2GkA + EI \end{bmatrix} \quad (22)$$

4. まとめ

プレストレストコンクリート構造の解析に用いるはり要素として, せん断の影響も考慮できるものを検討した。構成式としてはクリーブや乾燥収縮およびひび割れの影響も含めて計算できるように荷重項を求めた。本解析手法はひび割れを許容するプレストレストコンクリート構造の使用状態および終局状態における解析に対して適用可能である。

参考文献

- 1) 猪股俊司: 構造コンクリート曲げ部材使用限界状態の統一設計計算法, コンクリート工学, Vol.26, No.12, pp.95-105, 1988.
- 2) Elbadry, M.M. and Ghali, A.: Serviceability Design of Continuous Prestressed Concrete Structures, PCI Journal, Vol.34, No.1, pp.54-91, Jan.-Feb., 1989.
- 3) Bažant, Z.P. and Tsubaki, T.: Nonlinear Creep Buckling of a Reinforced Concrete Column, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol.106, No.ST11, pp.2235-2257, 1980.
- 4) Bažant, Z.P.: Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method, ACI Journal, Vol.69, No.4, pp.212-217, Apr., 1972.