

## 残存圧縮応力度を考慮した PRC 合成梁の2変数収れん法による設計

昭和プレハブ(株) 正会員 ○竹田 清二  
 イケダ技術研究所 正会員 工博 池田 永司  
 (株)ピーエス三菱 正会員 和智 美徳

Abstract : The design of partially prestressed reinforced concrete composite beams composed of precast prestressed concrete beam and cast-in-place reinforced concrete hasn't been put into practice because of complicated calculation procedure. However, if the beams are calculated taking account that the compressed stress by the prestressing acts as tension force, the composite beam will be able to design more advantageously and economically. We call it "preserved compressive stress". At the calculation, engineers sometimes ignore the preserved compressive stress, and at other times treat as full prestressed member. The former will result in over specification, and the latter under specification. Ikeda and authors have been proposed this calculation method used the preserved compressive stress. This paper shows a design example of a beam and introduces approximate method we developed how to solve an equation two unknown of plural degree.

Key words: concrete composite beam, preserved compressive stress, partially prestressed reinforced concrete

### 1. はじめに

本稿の目的は、PRC 合成梁の断面設計を2変数収れん法による近似解を求める新算定法を紹介し、あわせて、PRC 合成梁の実施計算例を示すことである。

弾性体における一体梁の PRC 部材の断面設計の精算法は、日本建築学会の PRC 指針<sup>1)</sup>に示されているが、二段階断面計算法が必要な PRC 合成梁についての記述は示されていない。PRC 合成梁の場合、第二段階の設計時、すなわち合成後に作用する仕上げ・積載荷重によるモーメントの断面力には第一段階のプレキャスト梁に残存するコンクリート圧縮応力度(以下「残存圧縮応力度」という)の変化を考慮する必要があるが、計算方法が面倒で、略式的に、残存圧縮応力度を無視して計算、また、フルプレストレスに近い PRC の場合、全断面が有効に働く現行 PC 規準を用いて設計しているようだ。前者の場合梁下端の鉄筋応力度並びにひび割れ幅が過大に評価され過剰設計、後者では過小設計となる可能性がある。PCa 内に残存する圧縮応力度が合成梁の引張要素として働くことに着目した池田<sup>2) 3)</sup>らによる研究で、精度の高い鉄筋応力度並びにひび割れ幅を算定できる断面計算法(以下「新算定法」という)が提案されている。しかし、この新算定法は中立軸の位置と下端鉄筋応力度を求める2元複次方程式を解く必要があり、計算方法が複雑・面倒で未だ実用化されていない。著者らは、表計算ソフトを用い2変数収れん法を開発して算出した。

### 2. 残存圧縮応力度

PCa 単体梁にプレストレス  $P$  と、自重や場所打ちコンクリート(以下「RC」という)スラブなどによる曲げモーメント  $M_D$  が作用した PCa 単体梁断面の応力度分布は図-1(上)で示される。RC で合成後に積載荷重などのモーメント  $M_L$  が作用したときの残存圧縮応力度の応力度分布は図-1(下の左側応力図)で示される。残存圧縮応力度分布は複雑でわかりにくいので、 $M_L$  による応力度分布 ( $m_1 \cdot m_2$ ) を縦軸周りに反転し ( $m_1' \cdot m_2'$ ) を描く(図-1 下の右側)。図において残存圧縮応力度の面積は  $dcfe = acgh = A + B$  となり、反転前の残存圧縮応力度と反転後の面積は等しくなる。応力度勾配  $m_1' \cdot m_2'$  と  $p_1 \cdot p_2$  の交点  $g$  から境界線  $k-k$  を算出し、残存圧縮応力度を求める。

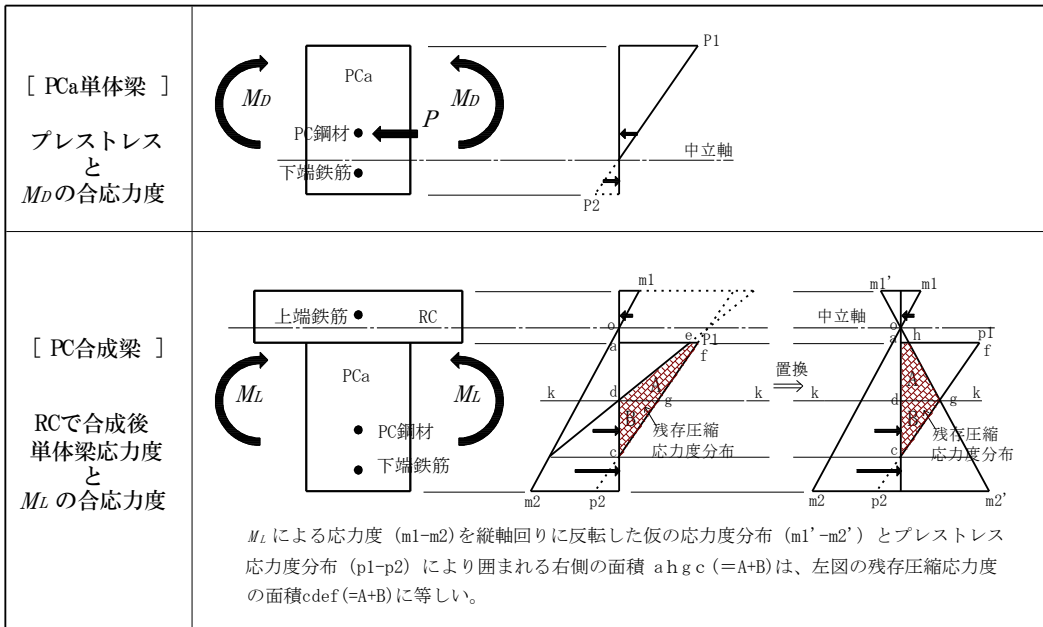
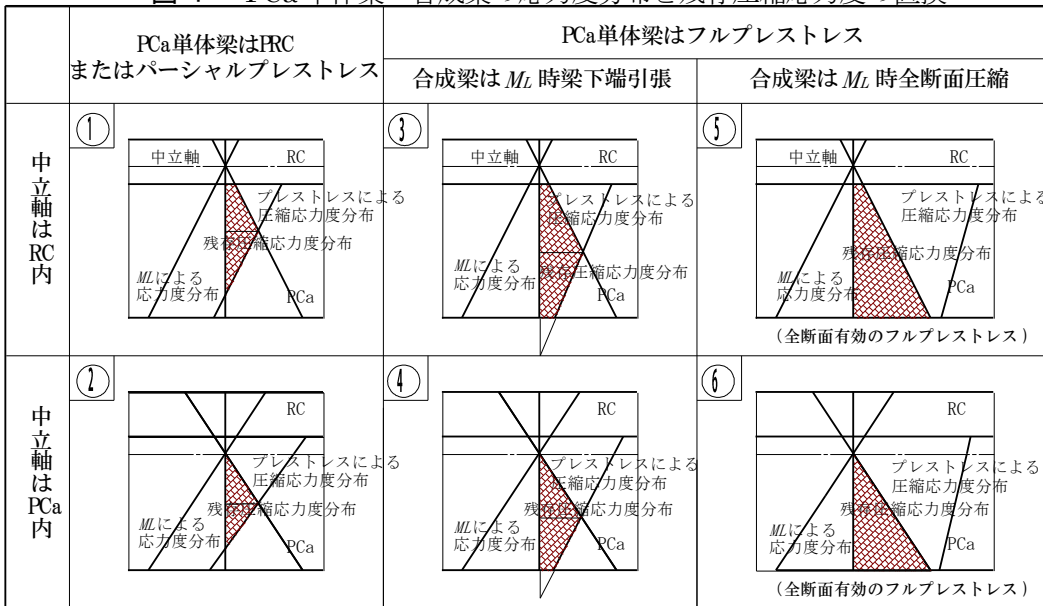
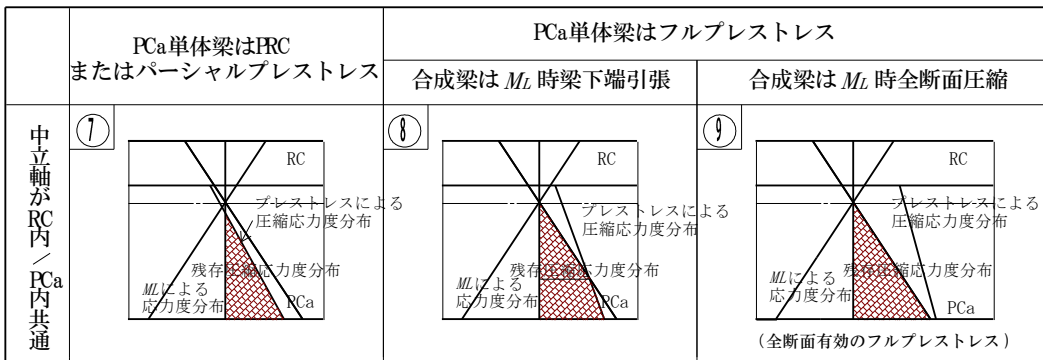


図-1 PCa 単体梁・合成梁の応力度分布と残存圧縮応力度の置換



(a) PCa単体梁の上端が多く圧縮されている場合 (正の勾配)



(b) PCa単体梁の下端が多く圧縮されている場合 (負の勾配)

図-2 残存圧縮応力度の組み合わせ

積載荷重などによるモーメント  $M_L$  が作用したときの残存圧縮応力度の分布の組み合わせを図-2に示す。残存圧縮応力度は、単体梁の応力度分布、合成梁の中立軸の位置に左右される。中立軸がRC内にあるかPCa内にあるか、またPCaの圧縮応力度勾配が正か負によっても分かれる。図-2(a)の①、②は単体梁がPRCの場合、③、④はPCa単体梁がフルプレストレスであるが、 $M_L$ 作用時に梁下端に引張が生じる場合、⑤、⑥はPCa単体梁の圧縮応力度が大きく、 $M_L$ 作用時でも全断面圧縮、すなわち全断面有効なフルプレストレスの設計となる。図-2(b)はPCa単体梁の圧縮応力度分布勾配が負の場合を示す。

3. 実例 PC 合成梁の計算

### 3.1 使用材料、断面形状及び設計諸元

断面寸法、鋼材位置：図-3 参照

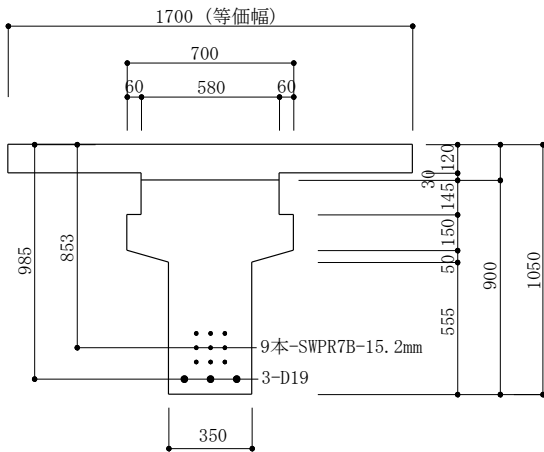


図-3 PC 合成梁の断面

コンクリート基準圧縮強度：

PCa 梁： $F_c=60 \text{ N/mm}^2$

RC スラブ： $F_{cr}=27 \text{ N/mm}^2$

PC 鋼材：9 本-15.2mm(SWPR7B)

鉄筋（下端主筋）：3 本-D19(SD345)

ヤング係数比(プレキャストコンクリートに対し)：

PC 鋼材： $n_p=5.57$  鉄筋： $n=5.86$

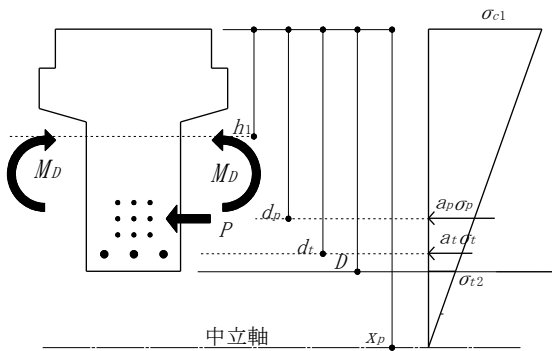
有効プレストレス力： $P=1,139.2 \text{ kN}$

単体 PCa 梁に作用するモーメント： $M_D=463 \text{ kNm}$

PC 合成梁に作用するモーメント： $M_L=597 \text{ kNm}$

### 3.2 PCa 単体梁の圧縮応力度分布

本例の PCa 単体梁はパーシャルプレストレスで設計されている。したがって、梁は全断面有効であるため、断面係数を用いて梁上端・下端コンクリート応力度を計算し、その値から中立軸 $x_p$ を算出する。断面係数の算定では鋼材の剛性を考慮する。



断面積： $A=4.216 \times 10^5 \text{ mm}^2$

上側断面係数： $Z_1=7.334 \times 10^7 \text{ mm}^3$

下側断面係数： $Z_2=5.799 \times 10^7 \text{ mm}^3$

図心から上端までの距離： $h_1=397.4 \text{ mm}$

偏心距離： $e=d_p-h_1=703-397.4=305.6 \text{ mm}$

梁上端応力度： $\sigma_{c1}=P/A-Pe/Z_1+M_D/Z_1=4.01 \text{ N/mm}^2$

梁下端応力度： $\sigma_{c2}=P/A+Pe/Z_2-M_D/Z_2=1.81 \text{ N/mm}^2$

下端筋応力度： $\sigma_t=n\sigma_{c1}(x_p-d_t)/x_p=11.53 \text{ N/mm}^2$

中立軸： $x_p=D\sigma_{c1}/(\sigma_{c1}-\sigma_{c2})x_p=1639.1 \text{ mm}$

図-4 PCa 単体梁の圧縮応力度分布と中立軸

### 3.3 PC 合成梁の設計

#### 3.3.1 残存圧縮応力度を考慮した計算式

PC 合成梁にモーメント $M_L$ が作用したときの残存応力度分布を図-5 に示す。寸法・記号は図-5 を参照。図-5 において、独立 2 変数である中立軸 $x_n$ と下端鉄筋応力度 $\sigma_{tg}$ が与えられると、 $M_L$ による応力度分布曲線と PCa 単体梁の応力度曲線の交点 $g$ の距離 $x_k$ が求まる。本題において残存圧縮応力度は、 $k-k$ 軸を境に上部 A は $M_L$ の応力分布に依存し、下部 B は単体梁の応力分布に依存する。 $x_k$ は式(1)で表される。

$$x_k = -d_{tg}(\sigma_{c0} + \sigma_{cg}) / [(\sigma_t + \sigma_{tg})/n - (\sigma_{c0} + \sigma_{cg})] \quad (1)$$

ここで、 $\sigma_{cg}$ は PC 合成梁コンクリートの上端応力度、 $\sigma_{c0}$ は同左位置での PCa 単体梁の仮想応力度で、式(2)、(3)に示す。

$$\sigma_{cg} = -\sigma_{tg}x_n/n/(d_{tg} - x_n) \quad (2)$$

$$\sigma_{c0} = \sigma_{c1}x_{pg}/x_p \quad (3)$$

軸力  $N$  とモーメント  $M_L$  の釣り合い式をたてる。

合成梁に曲げモーメントが作用した時の釣り合い式は(4),(5)式で示される。

$$N = \sigma_{tg}/n/(d_{tg} - x_n)[S_{cx} - n_p S_{px} - n S_{tx}] - P_{\sigma A} - P_{\sigma B} = 0 \quad (4)$$

$$M_L = \sigma_{tg}/n/(d_{tg} - x_n)[I_{cx} + n_p I_{px} + n I_{tx}] + M_{\sigma A} + M_{\sigma B} \quad (5)$$

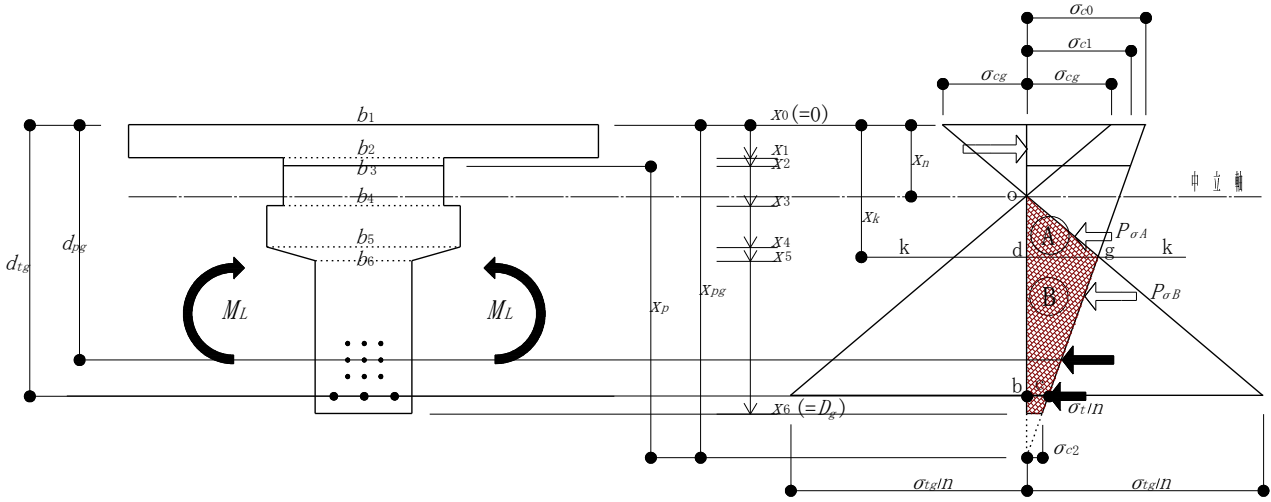


図-5 PC 合成梁に曲げモーメント $M_L$ が作用したときの応力度分布

中立軸 $x_n$ および下端鉄筋応力度 $\sigma_{tg}$ は式(4),(5)の2元複次方程式の解として求められる。また式中の記号は以下のとおりである。

$S_{cx}$ 、 $I_{cx}$ は、それぞれPC合成梁のコンクリートの中立軸 $x_n$ に関する断面一次モーメントおよび断面2次モーメントで、式(6),(7)であらわされる(左辺が一般式、右辺が図-5の場合を示す)。

$$S_{cx} = \int_0^{x_n} yb(y)dy = b_1 \int_{x_n-x_1}^{x_n} ydy + b_2 \int_{x_n-x_2}^{x_n-x_1} ydy + b_3 \int_0^{x_n-x_2} ydy \quad (6)$$

$$I_{cx} = \int_0^{x_n} y^2b(y)dy = b_1 \int_{x_n-x_1}^{x_n} y^2dy + b_2 \int_{x_n-x_2}^{x_n-x_1} y^2dy + b_3 \int_0^{x_n-x_2} y^2dy \quad (7)$$

$S_{px}$ 、 $S_{tx}$ 、 $I_{px}$ 、 $I_{tx}$ は、それぞれ合成梁のPC鋼材および鉄筋の中立軸 $x_n$ に関する断面1次モーメントおよび断面2次モーメントを示し、式(8)~(11)であらわされる。

$$S_{px} = a_p(x_n - d_{pg}) \quad (8)$$

$$S_{tx} = a_t(x_n - d_{tg}) \quad (9)$$

$$I_{px} = a_p(x_n - d_{pg})^2 \quad (10)$$

$$I_{tx} = a_t(x_n - d_{tg})^2 \quad (11)$$

$P_{\sigma A}$ 、 $M_{\sigma A}$ は、 $k-k$ 軸より上部の残存圧縮応力および当応力による抵抗モーメントで、式(12),(13)であらわされる(左辺が一般式、右辺が図-5の場合を示す)。

$$P_{\sigma A} = \int_{x_m}^{x_k-x_n} \sigma_y b(y)dy = b_3 \int_0^{x_3-x_n} \sigma_y dy + b_4 \int_{x_3-x_n}^{x_4-x_n} \sigma_y dy + \int_{x_4-x_n}^{x_k-x_n} b(y)\sigma_y dy \quad (12)$$

$$M_{\sigma A} = \int_{x_m}^{x_k-x_n} \sigma_y y b(y)dy = b_3 \int_0^{x_3-x_n} \sigma_y y dy + b_4 \int_{x_3-x_n}^{x_4-x_n} \sigma_y y dy + \int_{x_4-x_n}^{x_k-x_n} b(y)\sigma_y y dy \quad (13)$$

ここで、 $x_m$ は、 $x_n \leq x_2$ のとき $x_m = x_2 - x_n$ 、 $x_n > x_2$ のとき $x_m = 0$

$$\sigma_y = \sigma_{tg}y/n / (d_{tg} - x_n)$$

$P_{\sigma B}$ 、 $M_{\sigma B}$ は、 $k-k$ 軸より下部の残存圧縮応力および当応力による抵抗モーメントで、式(14),(15)であらわされる(左辺が一般式、右辺が図-5の場合を示す)。

$$P_{\sigma B} = \int_{x_k-x_n}^{x_l} \sigma_y b(y)dy = \int_{x_k-x_n}^{x_5-x_n} \sigma_y b(y)dy + b_6 \int_{x_5-x_n}^{D-x_n} \sigma_y dy \quad (14)$$

$$M_{\sigma B} = \int_{x_k-x_n}^{x_l} \sigma_y y b(y)dy = \int_{x_k-x_n}^{x_5-x_n} \sigma_y y b(y)dy + b_6 \int_{x_5-x_n}^{D-x_n} \sigma_y y dy \quad (15)$$

ここで、 $x_l$ は、 $x_{pg} \leq D$ のとき $x_l = x_{pg} - x_n$ 、 $x_{pg} > D$ のとき $x_l = D - x_n$

$$\sigma_y = \sigma_{c0}/x_{pg} / (x_{pg} - x_n - y)$$

式(4)(5)を2変数収れん法により中立軸 $x_n$ および下端鉄筋応力度 $\sigma_{tg}$ を求める。

なお、残存圧縮応力度にかかわる式(12)~(15)はPCa単体梁の圧縮応力度分布とその中立軸 $x_p$ 、PC合成梁の中立軸 $x_n$ 、ならびに両者の交点 $x_k$ の相互関係により組み合わせが変化する。

### 3.3.2 表計算ソフトを用いた2変数収れん法の考え方について

1変数の収れん法は、或る区間に解が1個あることが判明している場合、数回の繰り返しで簡単に工学的に精度の高い解が得られる。2変数の場合、2方向から同時攻略する必要があり厄介である。本法は解のある領域を自動計算で確認し、その領域をスタート台にして収れん法で解を求めるものである。

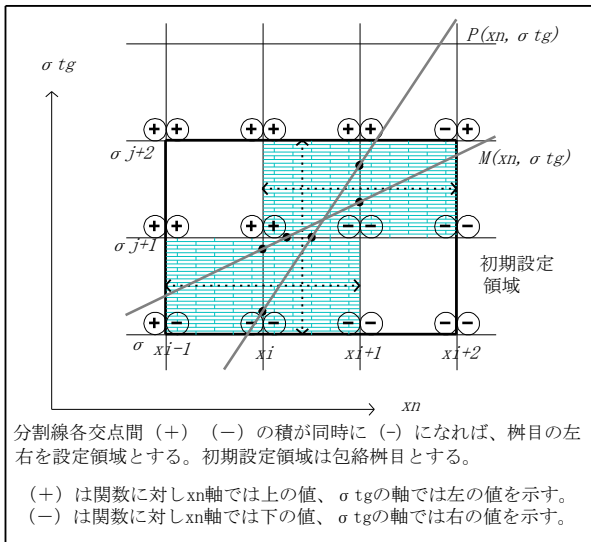


図-6 N,M関数の交点の領域の求め方

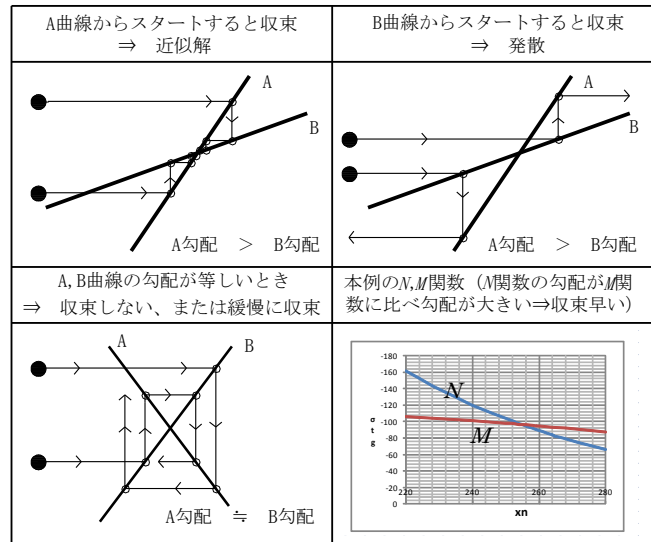


図-7 収れん方法と注意点

#### 第1ステップ:

残存圧縮応力度を無視した場合の $\sigma_{tg}$ を計算する。この計算は1変数 $x_n$ だけで簡単に解けるのでこれから求めた $\sigma_{tg}$ を基準に考える。

#### 第2ステップ:

図-6の $x_n - \sigma_{tg}$ 座標を楯目に分割する。 $x_n$ は第1ステップの $x_n$ を最小値として梁せいまで、 $\sigma_{tg}$ は、第1ステップの $\sigma_{tg}$ を最大値として選択する。楯目の $M(x_n, \sigma_{tg})$ 関数、 $N(x_n, \sigma_{tg})$ 関数の交点の上下の積が負の場合、左右の領域、同様に左右の積が負の場合上下の領域、それぞれを包絡する領域に解が存在する。

#### 第3ステップ:

本例の場合、 $\sigma_{tg}$ の最大値、最小値を起点として、対応するN関数のそれぞれの $x_n$ の近似値を求める(各数回繰り返し)。次にN関数の $x_n$ を起点としてM関数の $\sigma_{tg}$ を求める(各数回繰り返し)。設定した回数を繰り返す。最後の4点をたすき掛けにして解の精度を高め終了(図-7参照)。図-7に示すように最初の取り付け関数は必ず勾配の大きい方を選択する。勾配差が大きいほど収れん速度が速い。本例はM関数よりN関数の勾配が大きいので本論の収れん法は効果的である。

### 3.3.3 本例題の計算結果

1) 収れん法から、中立軸  $x_n=254.8\text{mm}$ 、下端鉄筋応力度  $\sigma_{tg}=-96.3\text{N/mm}^2$

#### 2) 検証

① PCa単体梁のPC合成梁コンクリート上端と同じ位置での仮想応力度 $\sigma_{c0}$ 、および応力度の交点 $x_k$ を求める。

$$\sigma_{c0} = \sigma_{c1}x_{pg}/x_p = 4.01 \times 1789/1639.1 = 4.38\text{N/mm}^2$$

$$x_k = -d_{tg}(\sigma_{c0} + \sigma_{cg}) / [(\sigma_t + \sigma_{tg})/n - (\sigma_{c0} + \sigma_{cg})]$$

$$= 985 \times (4.38 + 5.74) / [(11.5 + 96.3)/5.86 - (4.38 + 5.74)] = 405.2\text{mm}$$

②  $x_2(150) \leq x_n(254.8) \leq x_3(295)$ ,  $x_3(295) \leq x_k(405.2) \leq x_4(445)$ ,  $x_6(1050) \leq x_{pg}(1639.1)$ から $P_{\sigma A}$ ,  $P_{\sigma B}$ ,  $M_{\sigma A}$ ,

$M_{\sigma B}$  の組み合わせが特定される (自動判定)。

- ③ 軸力  $N$  の釣り合いが 0 であること、抵抗モーメントが外力モーメント  $M_L$  と等しいことを確認する。

$$N = \sigma_{tg}/n/(d_{tg} - x_n)[S_{cx} - n_p S_{px} - n S_{tx}] - P_{\sigma A} - P_{\sigma B}$$

$$= 96.3/5.86/(985 - 254.8) \times [45.013 - 4.160 - 3.682] \times 10^6 - 1.761 \times 10^5 - 6.614 \times 10^5 = -0.167 \times 10^3 \text{N}$$

$$\doteq 0 \Rightarrow \text{Satisfactory}$$

$$M_L = \sigma_{tg}/n/(d_{tg} - x_n)[I_{cx} + n_p I_{px} + n I_{tx}] + M_{\sigma A} + M_{\sigma B}$$

$$= 96.3/5.86/(985 - 254.8) \times [8.4610 + 2.4886 + 2.6888] \times 10^9 + 17.820 \times 10^6 + 271.930 \times 10^6$$

$$= 597.002 \times 10^6 \text{Nmm} \doteq 597 \text{kNm} \Rightarrow \text{Satisfactory}$$

ここで、

$$S_{cx} = b_1/2(X_0^2 - X_1^2) + b_2/2(X_1^2 - X_2^2) + b_3/2X_2^2 = 4.5013 \times 10^6$$

$$S_{px} = a_p n_p (d_{pg} - x_n) = -4.1603 \times 10^6 \quad S_{tx} = a_t n (d_{tg} - x_n) = -3.6823 \times 10^6$$

$$I_{cx} = b_1/3(X_0^3 - X_1^3) + b_2/3(X_1^3 - X_2^3) + b_3/3X_2^3 = 8.4610 \times 10^9$$

$$I_{px} = a_p n_p (d_{pg} - x_n)^2 = 2.4886 \times 10^9 \quad I_{tx} = a_t n (d_{tg} - x_n)^2 = 2.6888 \times 10^9$$

$$P_{\sigma A} = b_3 \sigma_{tg}/n/(d_{tg} - x_n) 1/2X_3^2 + b_4 \sigma_{tg}/n/(d_{tg} - x_n) 1/2(X_k^2 - X_3^2) = 1.7615 \times 10^5 \text{N}$$

$$P_{\sigma B} = \sigma_{c0} b_4/x_{pg} \{X_{pg}(X_4 - X_k) - (X_4^2 - X_k^2)/2\} + \sigma_{c0}/x_{pg} \{X_{pg}(\Delta b X_5 + b_6)(X_5 - X_4) - 1/2(\Delta b X_{pg} + \Delta b X_5 + b_6)(X_5^2 - X_4^2) + 1/3 \Delta b (X_5^3 - X_4^3) + \sigma_{c0} b_6/x_{pg} \{X_{pg}(D_g - X_5) - 1/2(D_g^2 - X_5^2)\}\} = 6.6142 \times 10^5 \text{N}$$

$$M_{\sigma A} = b_3 \sigma_{tg}/n/(d_{tg} - x_n) 1/3X_3^3 + b_4 \sigma_{tg}/n/(d_{tg} - x_n) 1/3(X_k^3 - X_3^3) = 1.7820 \times 10^7 \text{Nmm}$$

$$M_{\sigma B} = \sigma_{c0} b_4/x_{pg} \{X_{pg}(X_4^2 - X_k^2)/2 - (X_4^3 - X_k^3)/3\} + \sigma_{c0}/x_{pg} \{X_{pg}(\Delta b X_5 + b_6)(X_5^2 - X_4^2)/2 - (\Delta b X_{pg} + \Delta b X_5 + b_6)(X_5^3 - X_4^3)/3 + \Delta b (X_5^4 - X_4^4)/4 + \sigma_{c0} b_6/x_{pg} \{X_{pg}(D_g^2 - X_5^2)/2 - (D_g^2 - X_5^2)/3\}\}$$

$$= 27.1929 \times 10^7 \text{Nmm}$$

$$X_0 = -x_n = -254.8, X_1 = x_1 - x_n = -134.8, X_2 = x_2 - x_n = 104.8, X_3 = x_3 - x_n = 40.2, X_4 = x_4 - x_n = 190.2,$$

$$X_5 = x_5 - x_n = 240.2, X_6 = x_6 - x_n = 795.2, X_{pg} = x_{pg} - x_n = 1534.3, X_k = x_k - x_n = 150.4$$

$$\Delta b = (b_5 - b_6)/(x_5 - x_4) = 7.0$$

- 3) ひび割れ幅の確認 (PRC 指針による。計算過程省略)

$$\text{下端鉄筋応力度 } \sigma_t + \sigma_{tg} = 11.5 - 96.3 = -84.8 \text{N/mm}^2 \quad \text{最大ひび割れ幅 } w_{max} = 0.06 \text{mm} \leq 0.1 \text{mm}$$

- 4) 終局耐力安全性確認

$$M_u = T_{py}(d_{pg} - 0.5x_n) + T_{sy}(d_{tg} - 0.5x_n) = 1,967 \text{kNm}$$

$$\geq \max[1.7(G+P), 1.2G+2P] = \max[1.7 \times (463+567), 1.2 \times 463 + 2 \times 597] = 1,802 \text{kNm}$$

#### 4. まとめ

本論は実用性を考慮して断面幅が複雑に変化する梁を対象とした。計算は Basic や Fortran ではなく汎用的な表計算ソフトで挑戦した。一旦プログラムが完成すれば、特段のソフトがなくても誰でも使用できるという有利性がある。しかしながら、残存圧縮応力度の計算を、できるだけ汎用性の高いものに仕上げるまでの過程は、PCa 単体梁の応力状態、PC 合成梁の応力状態の組み合わせが複雑に絡んで相当に面倒である。なお端部の反転モーメントについては触れていないが、組み立て梁の場合、端部接合部は圧着されていないので、残存圧縮応力度は適用できない。また紙面の都合で、プレストレスレベルと鉄筋の組み合わせでコストミニマムの考察は割愛した。別の機会に改めて触れてみたい。

#### 5. 参考文献

- 1) プレストレスト鉄筋コンクリート (Ⅲ種 PC) 構造設計・施工指針・同解説、日本建築学会、2003
- 2) 池田永司、青木繁、プレキャストコンクリートに残存する圧縮応力の影響を受けるコンクリート合成梁の断面算定法の研究、日本建築学会構造系論文集 No.549,121-126, 2001
- 3) 池田永司、青木繁、プレキャストコンクリートに残存する圧縮応力を利用して性能とコストのバランスを計るコンクリート合成梁の設計法の研究、日本建築学会構造系論文集 No.571,119-125, 2003