

循環パイプクーリング解析における温度解の安定性に関する基礎的研究

日本高圧コンクリート(株) 正会員 修(工) ○荒畑 智志
 日本高圧コンクリート(株) 正会員 齊藤 亮一
 名城大学 正会員 博(工) 石川 靖晃

Abstract : This study aims to clarify the stability conditions of FEM thermal analysis with the pipe cooling system. Stability conditions for time dimension problem is numerically discussed for simple structural models with pipe cooling system based on the eigenvalue of amplification matrix. After all, it is confirmed that thermal solutions with pipe cooling system might be stable if the length of air mesh size is smaller and time increment and flow velocity of water in pipe element are larger.

Key words : Pipe cooling , Stability , Eigenvalue , Amplification Matrix

1. はじめに

パイプクーリングを実施する際、冷却装置を使用せず外気中あるいは地面の中にパイプを配置することによってクーリング水を冷却する方法、いわゆる循環型パイプクーリング手法についての解析的検討が著者らによって行われている¹⁾。著者らは、コンクリート要素の任意位置にパイプ要素が配置可能な温度解析コード²⁾を用いて簡単な解析モデルに対してFEM数値検討を行い、パイプ要素の長さが大きい場合はパイプ内水温の解は数値的に不安定となり発散するが、パイプの要素分割を細かくし、パイプ要素長さを小さく与えれば、水温の解は数値的に安定することを報告している¹⁾。循環型パイプクーリング解析にて常に安定した温度解を得るためには、このような不安定現象がなぜ生じるのか理論的に明らかにする必要がある。しかし、パイプクーリング解析における温度解の安定性についての議論はこれまで行われていない。

本研究は、循環パイプクーリング解析における温度解の安定性の条件を理論的に明らかにすることを目的とする。まず、パイプクーリングの支配方程式に対して解の安定性について固有値の視点から理論的考察を行った。数値解析の差分解の安定性考察は一般的にもっとも簡単な2自由度の解析モデルに対して考察を行い必要条件としての条件を導くのが通常であり、本パイプクーリングFEM解析においても、同様なモデルから考察を行い、温度解ならびに別途算定した固有値と比較することにより、安定性に対する数値検討を行った。

2. パイプクーリング解析における解の安定性に関する理論的考察

コンクリート要素内にパイプ要素が埋め込まれている領域について考える。このとき、パイプクーリング解析における支配方程式は、コンクリート体積内の熱伝導方程式ならびにパイプ表面からの熱収支のつり合い式から構成される。境界条件は、コンクリートと外気における熱伝達境界ならびにパイプ壁面とコンクリートにおける熱伝達境界である。これらの支配方程式および境界条件を有限要素に基づき離散化すると、最終的にマトリクス形で次式で表される支配方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} K_c & -K_{cw} \\ -K_{wc} & K_w \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{T}_c \\ \bar{T}_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} \bar{T}_c \\ \bar{T}_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_c \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1)$$

ここで、 \bar{T}_c はコンクリートの節点温度、 \bar{T}_w はパイプ内の節点水温である。また、 K_c 、 C および F_c は、熱伝導方程式に関わるマトリクスであり、 K_{cw} 、 K_{wc} 、 K_w および W はパイプクーリング効果を表す

マトリクスである。式(1)の詳細については文献²⁾を参照されたい。

時間ステップ*i*と*i+1*において、式(1)を時間差分化すると次式が得られる。

$$[A_1]\{\bar{T}\}_{i+1} = [A_2]\{\bar{T}\}_i + \{Q\}_{i+1} \tag{2}$$

ここで、 $\{\bar{T}\}_i = \{\bar{T}_c \ \bar{T}_w\}_i^T$ 、 $\{Q\}_{i+1} = \theta\Delta t\{F_c \ 0\}_{i+1}^T + (1-\theta)\Delta t\{F_c \ 0\}_i^T$ であり、

$$[A_1] = \theta\Delta t \begin{bmatrix} K_c & -K_{cw} \\ -K_{wc} & K_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}, \quad [A_2] = -(1-\theta)\Delta t \begin{bmatrix} K_c & -K_{cw} \\ -K_{wc} & K_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} \tag{3}$$

である。 Δt はステップ間の時間増分、 θ は差分近似における重み係数であり、 $0 \leq \theta \leq 1$ である。

$$[J] = [A_1]^{-1}[A_2] \tag{4}$$

とおくと、 $\{\bar{T}\}_{i+1} = [J]\{\bar{T}\}_i$ の安定性を議論することが、式(2)の安定性を議論するための必要条件となる。ここで $[J]$ は、ある時間ステップでの状態から次の時間ステップの状態を関連付けるマトリクスであり、Amplification Matrixと呼ばれる。 $[J]$ において、すべての固有値の絶対値が1より小さい場合、解は必ず安定し、絶対値が1より大きい固有値が存在する場合、解が発散し不安定になり得る³⁾。パイプクーリングを考慮しない通常の熱伝導方程式の問題であれば、 $\theta \geq 1/2$ であれば、 $[J]$ のすべての固有値の絶対値は1以下となることが数学的に保証される³⁾。しかしパイプクーリングを考慮した解析においては、固有値の絶対値が1以下になることは必ずしも保証されない。

3. 2自由度モデルによる温度解の安定性に対する数値検証

前節で述べたように、パイプクーリングを考慮した解析においては、 $[J]$ の固有値の絶対値が1より大きくなる可能性があり、このことが温度解の安定性と関連していると思われる。そこで、2自由度を有するパイプクーリング解析モデルを想定し、その固有値と温度解との対応を調べることで、パイプクーリング解析における解の安定性に関する検討を行った。

図-1に解析対象モデルを示す。図中の立方体はコンクリートに接している空気要素を表しており、一辺の長さは L である。空気要素の中に、パイプが完全に貫通する形で配置されているが、ハッチされている部分のみでパイプと空気との熱交換が行われ、他のパイプ部分では空気とは断熱状態にあると仮定する。左側の空気要素面の温度は一様に温度 T_{c0} で固定され、右側の空気要素面の温度はすべて T_c であると仮定する。ハッチされている円柱はパイプ要素を表しており、長さは βL である。なお β は空気要素長さに対するパイプ要素長さの比であり、 $0 < \beta \leq 1$ である。ハッチされている面以外のすべての面は断熱境界であると仮定する。左側のパイプ内水節点温度は温度 T_{w0} で固定され、右側のパイプ内水節点温度は T_w であると仮定する。このとき、この解析対象モデルに対して、式(1)は未知数 T_c と T_w の2つにて表される。

式(1)中のすべての行列成分は解析パラメータおよび形状関数の積分を含んだ項から構成される²⁾が、それらの項を具体的に手計算にて求め行ごとに展開すると、10個の式が得られる。10個の式のうち独立した式は4つであるが、2つの式は固定節点に対応する行の式であり、固有値を計算する対象から外れることになる。すなわち固有値を計算するための独立な式は残りの2つの式となり、結局式(1)は、最終的に2行2列のマトリクス形にて次式で表される。

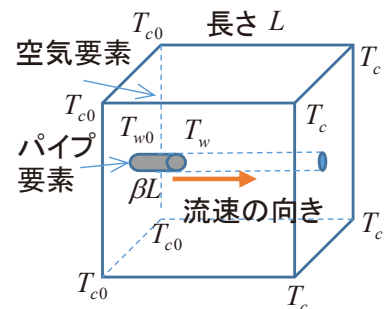


図-1 2自由度解析対象モデル

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4}kL + \frac{1}{6}\pi\alpha_w L\beta^3 & -\frac{1}{6}\pi\alpha_w L\beta^2 \\ -\frac{2}{3}\frac{\alpha_w L\beta^2}{r} & \frac{1}{2}\rho_w c_w u + \frac{2}{3}\frac{\alpha_w L}{r}\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_c \\ T_w \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{12}\rho_c c_c L^3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\rho_w c_w L\beta \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} T_c \\ T_w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで、 k は立方体の熱伝導率、 r はパイプ半径、 α_w はパイプ面の熱伝達率、 u はパイプ内流速、 $\rho_c c_c$ は立方体の体積熱容量、 $\rho_w c_w$ はパイプ内水の体積熱容量である。また、 G_1 および G_2 は定数項を適宜まとめた項である。

式(2)～(5)から2行2列の $[J]$ の固有値を求めることができる。しかし、2自由度の問題においても固有値を陽な形で書き下すことは依然として困難である。そこで、解析パラメータを適宜与え数値実験を行い、2つの固有値の絶対値が1未満になる β の最大値を数値的に求めることを試みた。同時に、この解析モデルに対するFEMパイプクーリング解析を行った。表-1に解析に用いたパラメータを示す。

図-2に流速と β の最大値の相互関係を示す。流速の向きは図-1に示した流速方向を正としている。図中のプロットは、2つの固有値の絶対値がともに1となるための β の最大値を表している。すなわちプロットより下の領域は、固有値の絶対値が必ず1未満になる安定領域を意味している。一方プロットより上の領域は、解が不安定になる領域を意味している。すなわちパイプクーリングを考慮しな

表-1 解析パラメータ

立方体の熱伝導率 k (W/mK)	0.0250
要素長さ L (m)	3
パイプ半径 r (m)	0.0125
パイプ面での熱伝達率 α_w (W/m ² K)	14
立方体(空気)の体積熱容量 $\rho_c c_c$ (J/m ³ K)	1173
パイプ内水の体積熱容量 $\rho_w c_w$ (J/m ³ K)	4180000
時間増分 Δt (s)	10
差分近似における重み係数 θ	0.6667
立方体(空気)の初期温度(°C)	30
パイプ内水の初期温度(°C)	20
空気およびパイプ内水の固定温度(°C)	10

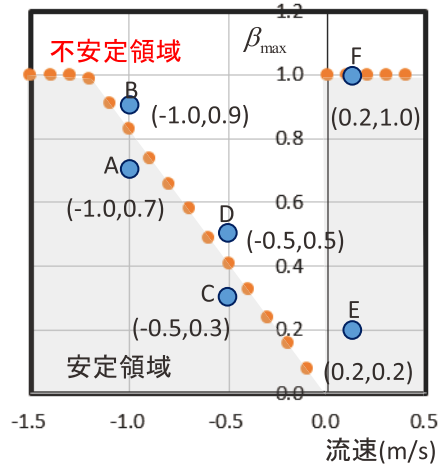


図-2 流速と β の最大値の関係

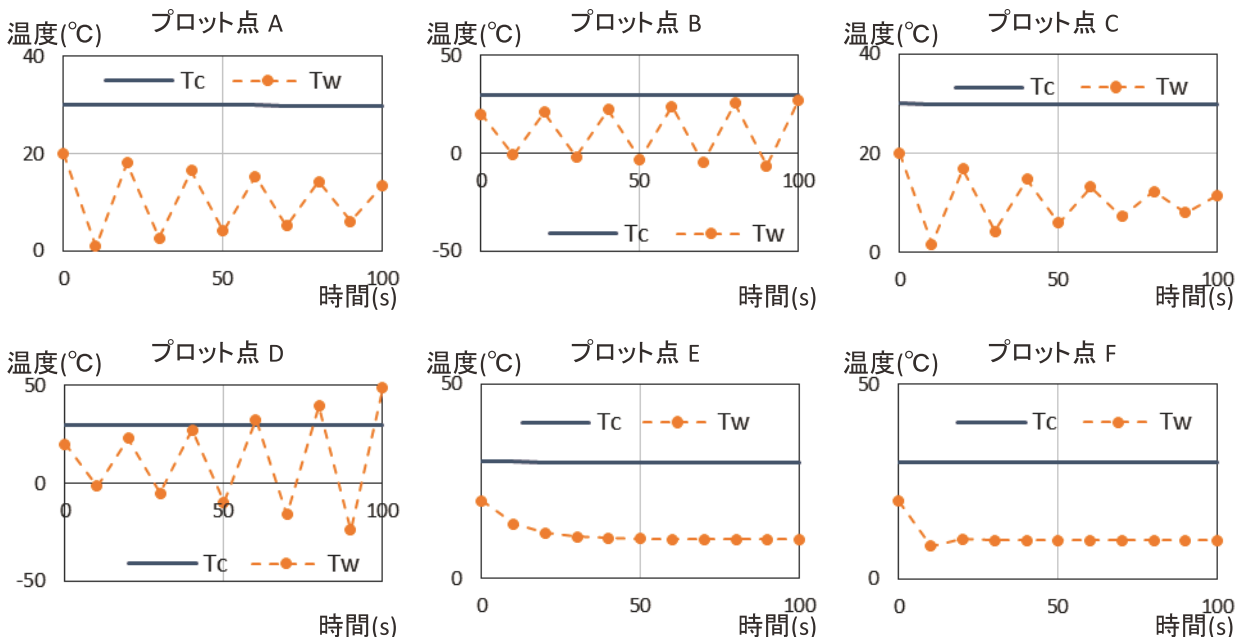


図-3 プロット点A~Fにおける温度履歴

表-2 プロット点A~Fにおける固有値

	A	B	C	D	E	F
固有値(小さい方)	-0.8994	-1.0558	-0.8297	-1.1441	-0.1542	0.3980
固有値(大きい方)	0.9996	0.9992	0.9999	0.9998	0.9999	0.9989

い通常の熱伝導問題と異なり、流速の値によっては固有値の絶対値が1より大きくなる領域が存在することを図-2は示している。流速が正の場合、流速の値に依らず β の最大値は1となり、一方で流速が負の場合は、流速が大きくなるほど β の最大値も大きくなる。すなわち、外部から空気要素内部にパイプ内水が移動する場合には、パイプ要素長さに依らず温度解は安定する一方で、空気要素内部から外部にパイプ内水が移動する場合には、流速が大きいかほどパイプ要素長さを大きくできることを意味している。

図-2で得られた解の安定領域とFEM解析における温度解の安定性が対応しているかを検証するために、図-2中のA~Fで示されるプロット点の解析パラメータを用いて、立体要素内の任意の位置にパイプレイアウトを配置可能な温度解析コード²⁾を用いて、別途FEM解析を行った。プロット点A~FにおいてFEM解析により得られた温度履歴を図-3に示す。プロット点A, C, Eではパイプ内水温 T_w は振動しながら固定温度に収束している。プロット点Fではパイプ内水温解は振動せずに固定温度に収束している。一方、プロット点B, Dではパイプ内水温解は振動しながら発散している。時間ステップのオーダーが10sと極めて小さいため、空気温度解 T_c はプロット点A~Fすべてにおいてわずかに減少するもののほぼ一定となっている。表-2に各プロット点における $[J]$ の2つの固有値を示す。水温解が振動しながら収束するプロット点A, C, Eでは、小さいほうの固有値は負でかつ絶対値は1より小さくなっている。水温解が振動せずに収束するプロット点Fでは、小さいほうの固有値は正でかつ絶対値は1より小さくなっている。水温解が発散しているプロット点B, Dでは、小さいほうの固有値の絶対値は1より大きくなっている。また、プロット点A~Fにおいて大きいほうの固有値はすべて1より小さいが0.9989~0.9999の範囲に存在し、空気温度解がほぼ変化しないことに対応している。以上より、図-2に示す解の安定領域とFEM解析での温度解の安定性は正確に対応していることが確認された。

次に解析パラメータが β の最大値に及ぼす影響について解析パラメータを変えて数値実験を行うことにより検討を行った。図-4に β の最大値と流速との関係を示す。変動させた解析パラメータは、要素長さ L 、パイプ面での熱伝

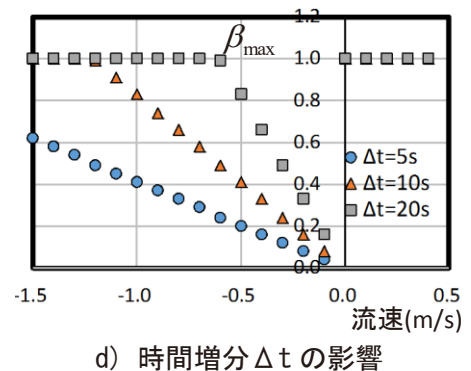
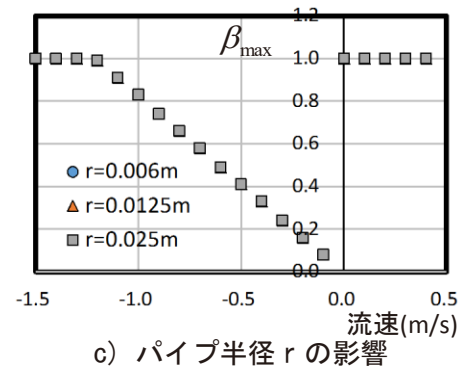
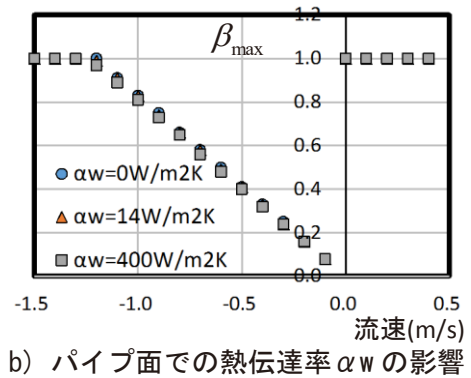
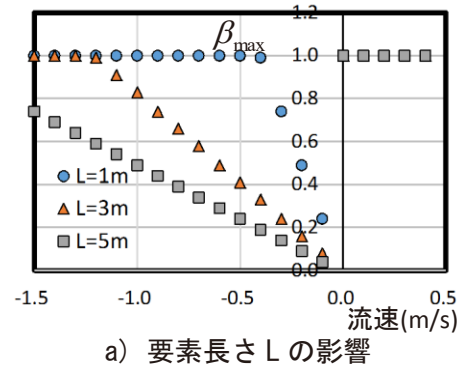


図-4 解析パラメータが β の最大値と流速の関係に及ぼす影響

達率 α_w ，パイプ半径 r および時間増分 Δt の4つである。他の解析パラメータは表-1とまったく同じである。図より，要素長さを小さく，あるいは時間増分を大きく与えれば， β の最大値が大きくなり，一方でパイプ半径やパイプ面での熱伝達率は β の最大値にほとんど影響を及ぼさないことが分かる。すなわち，時間増分が大きいほど，あるいは空気要素長さが小さいほど，温度解が安定するためのパイプ長さを大きく設定することが可能であることが確認された。

4. 循環パイプクーリング問題への適用性についての検証

前報¹⁾で示した循環パイプクーリング解析モデルを用いて，前述の2自由度モデルまでの一連の考察から得られた知見がこの解析モデルにも適用可能かどうか検討を行った。図-5に解析モデルを示す。解析モデルは2m×2m×3mの1次，2次コンクリートと，2m×2m×3mの空気を表す要素で構成されている。1リフト目の1次コンクリートを高さ1mで打設し，10日後に2リフト目の2次コンクリートを打設している。1次，2次コンクリートは一辺が0.2mの立方体要素で要素分割されている。1次，2次コンクリートの側辺が隣接するように，空気要素は配置されており，高さ方向についてのみ要素分割されている。パイプレイアウトについては，図-5に示すように1次，2次コンクリートおよび隣接する空気要素を通過させて循環させるようにパイプが配置されている。1次，2次コンクリートに埋め込まれた水平方向のパイプ要素長さは283mmとし，空気要素に埋め込まれた水平方向のパイプ要素長さは1414mmである。1次，2次コンクリート要素と空気要素が隣接する箇所においては，相互の影響が生じないように二重節点としている。解析諸元を表-3に示す。

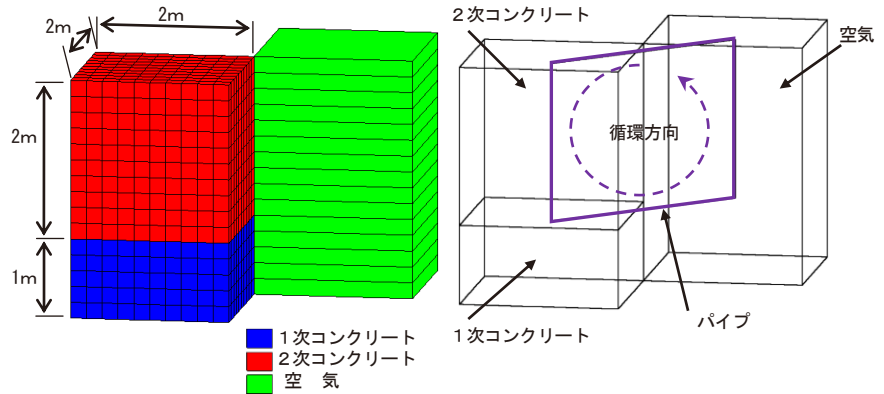


図-5 循環型パイプクーリング解析モデルとパイプレイアウト

表-3 解析諸元値

		コンクリート (発熱体)	空気 (非発熱体)
伝熱物性	熱伝導率 (W/mK)	2.7	0.0257
	比熱 (J/kgK)	1150	1006
	密度 (kg/m ³)	2350	1.166
	打込み温度 (°C)	25	---
	セメント種類	早強	---
	単位セメント量 (kg/m ³)	467	---
	終局断熱温度上昇量 (°C)	71.71	---
パイプ物性	熱交換水初期温度 (°C)	20	
	熱伝導率 (W/mK)	430	14
	水密度 (kg/m ³)	1000	
	水比熱 (kg/m ³)	4180	
	パイプ半径 (m)	0.0125	
流速 (m/s) [流量 (L/min)]	0.4828 [14]		
外気温 (°C)	20		
熱伝達率 (W/m ² K)	型枠存在時	8	
	養生マット存在時	5	
	コンクリート露出面	14	
	空気の周り	14	

上記の解析条件で温度解析を実施した場合，コンクリートに入水する箇所において，解析直後から水温解が発散する現象が生じたことが前報にて報告されている。なお，コンクリートから排水される箇所においてはパイプ内水温は安定していることも確認されている。この解析条件を基準として，基準より流速を大きくした場合，時間ステップを大きくした場合さらには空気要素長さを小さくした場合を解析ケースとしFEM温度解析を行った。

図-6に各解析ケースにおけるコンクリート入水箇所におけるパイプ内水温履歴を示す。流速を基

準より2倍以上とした場合、あるいは時間ステップを基準より2倍以上とした場合、あるいは空気要素長さを基準の0.5倍以下とした場合において、水温解が安定していることが分かる。なお、空気要素長さを小さくした場合においては、その割合に応じて空気要素内のパイプ要素長さも小さくしている。以上のことから、実際の循環型パイプクーリング解析を実施する上で、前節で得られた知見をそのまま循環型パイプクーリングの問題に適用できることが確認された。

5. まとめ

以上より本論文の範囲内で以下の結論を得た。

- パイプクーリングを考慮しない通常の熱伝導問題と異なり、パイプクーリングを考慮したFEM温度解析においては、解析パラメータによっては支配方程式の時間差分式における固有値の絶対値が1より大きくなること有りうることを確認された。さらには、固有値の絶対値が1より大きくなる時温度解が不安定になることも確認された。
- 空気要素にパイプ水が流入する場合には、解析パラメータに依らず温度解は安定することが確認された。
- 空気要素からパイプ水が流出する場合には、流速が大きいほど、あるいは時間増分が大きいほど、あるいは空気要素長さが小さいほど、温度解が安定することが確認された。

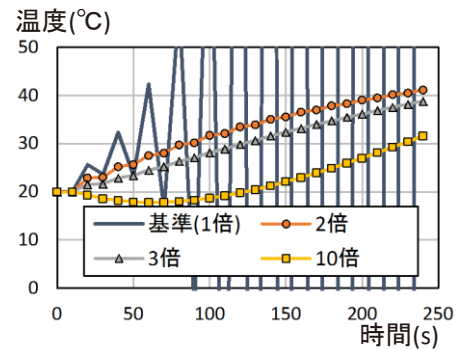
本論文では解の精度についてはこれまで言及していないが、今回の検討の範囲においては、従前の実験結果や解析結果を鑑みると実用上の解の精度は得られていると考える。一般的には、解の精度を高めるためには時間増分は小さく与える必要があることは論を待たないが、一方で解が不安定になる閾値より大きい時間増分を与える制約が存在することを本知見は示唆している。すなわち、実際問題において与えられた流速に対して解が仮に発散した場合、本知見は、解が安定するように適切にメッシュ分割や時間増分を選択するための判断材料となると考えられる。

謝辞

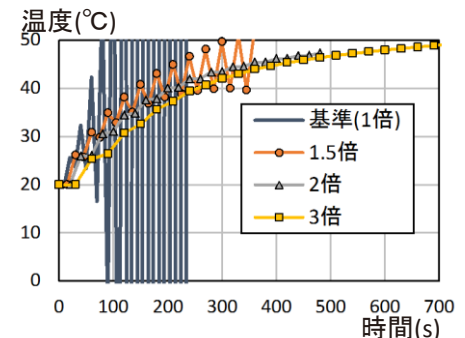
本研究は、LECOM研究会の研究活動の一環として実施されたものであり、研究会メンバーの皆様から多くのご意見をいただきました。とくに、田辺忠顕先生におかれましては、研究の着想ならびに遂行に至るまでの間にわたり多くの貴重なご意見をいただきました。ここに厚くお礼申し上げます。

参考文献

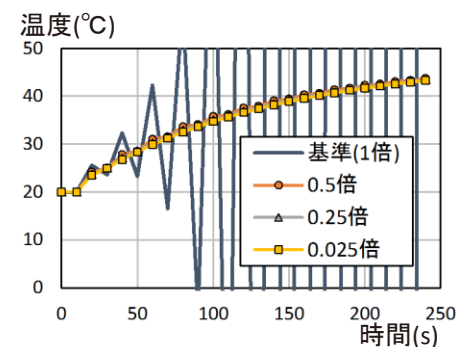
- 1) 荒畑智志, 斉藤亮一, 石川靖晃: マスコンクリートにおける循環パイプクーリング解析手法に関する基礎的研究, 第25回プレストレストコンクリートの発展に関するシンポジウム論文集, pp. 579-582, 2016
- 2) Ishikawa, Y., Mizobuchi, T. and Tanabe, T. : Development of FEM Thermal Analysis for Concrete Structures with Pipe Cooling System, Proc. Of Concreep9, pp. 491-498, 2013
- 3) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: The Finite Element Method Fifth edition Vol.1 The Basis, Butterworth-Heinemann, 2000



a) 流速を大きくした場合



b) 時間ステップを大きくした場合



c) 空気要素長さを小さくした場合

図-6 コンクリート入水箇所におけるパイプ内水温度履歴