

## PC構造の耐震性に関する非線形な変形特性と弾性エネルギー一定則

横浜国立大学名誉教授 名誉会員 工博 ○池田 尚治  
 黒沢建設(株) 名誉会員 博(工) 黒沢 亮平  
 黒沢建設(株) 正会員 工修 平井 圭  
 黒沢建設(株) 正会員 博(工) 山口 隆裕

Abstract : This paper is entitled as “Nonlinear moment-curvature characteristics and elastic energy balance concept for the seismic evaluation of prestressed concrete structures”. The formulations of bilinear, trilinear and nonlinear moment-curvature relationships were obtained and were clarified beyond the state of decompression for prestressed concrete members. The formula of nonlinear type is not only a rigorous solution but also a terse expression including a single square root of curvature as a variable. It was shown that the bilinear or trilinear formula was the expression of the combination of sequential lines for the nonlinearity. By using these formulae, the formulae of elastic energy balance concept were successfully obtained. They were evaluated for comparison and the coincidence of more than 95% was found. “Elastic Energy Balance Concept” is a clear concept to express the excellent peculiarity of prestressed concrete structures against severe repetitive earthquake motions.

Key words: Elastic energy balance concept, Decompression, Bilinear, Trilinear, Nonlinear, Seismic

### 1. はじめに

耐震設計ではニューマークのエネルギー一定則を用いて過大な動的応答地震力に対処してきた。発生頻度の低い大地震に対し定量的に安全度を担保する手段としてのニューマークの方法は言わば耐震設計における救世主的な手法と考えられるが塑性変形によるエネルギー吸収に依存するために地震後に残留変形を許すこととなる。これに対してPC(プレストレストコンクリート)構造は材料が弾性範囲でバイリニア的な変形性能を発揮するので過大な地震応答を回避でき、かつ、弾性としての復元性を有することにより地震後に残留変形を残さないような設計が可能となる<sup>1)</sup>。これにより従来の「エネルギー一定則」を発展させた「弾性エネルギー一定則」を構築することにより地震後に業務が継続して行えるBCP(Business Continuity Plan)対応の耐震設計法を確立することが可能である<sup>2)</sup>。

本論文ではPC部材のディコンプレッション以降の変形についてバイリニア型の場合と同様にトライリニア型および弾性非線形解による定式化を行った。変形を表すこれらの普遍的な式は、いずれも地震応答の数値解析に際し極めて有用である。さらにバイリニア型と同様にトライリニア型および弾性非線形解の式を弾性エネルギー一定則へ適用して定式化し、数値的な比較を行った。本論文はこれらの成果の内容について詳述するものである。これらの成果を活用することにより実務における構想設計(Conceptual Design)の中でPC構造の卓越性による性能創造を行うことが可能なのである。

### 2. ディコンプレッション以降のモーメントと曲率の特性

PC部材は曲げひびわれ発生後にバイリニア的な変形を示すことが知られている。さらに変形が進めばトライリニア型の変形となることが考えられ、これらを表す式は弾性エネルギー一定則の定式化に必要であって著者らにより定式化された<sup>2)</sup>。そこではPC部材が曲げを受けて変形するとき、曲げモーメントと曲率に関する無次元の直交座標において原点(0, 0)から点(1, 1)までの形状は棒部材の曲

げ変形であるから直線で表されることは梁理論で知られているが、それ以降では点(1, 1)と点(4, 2)を普遍的に満足することが見出され、この2点間を直線で結び付けてバイリニア型とした。点(9, 7/3)も同様に普遍的な点であり点(4, 2)と直線で結べばトライリニア型となる。著者らによって見出されたこれらの普遍的な形状の定式化<sup>2)</sup>は地震応答解析の際に極めて有用である。しかしながら厳密に考えるとこれらが直線かどうかは不明である。そこでこれらバイリニア、トライリニアと呼ばれる直線の組み合わせを含めた  $M\Phi$  (モーメント・曲率) 関係の定量的な検証を行うこととしたのである。対象部材は独立1本柱で下端がフーチングに固定された構造を考える。断面は長方形断面で断面の中央にプレストレス力  $P$  が導入されているとする。断面の高さを  $h$ 、幅を単位長さとするれば平均プレストレスは  $P/h$  である。荷重は柱の上端に曲げモーメント  $M$  が作用するとし死荷重は考えない。また、地震力が繰り返し作用することを考えてコンクリートの引張強度を無視する。

### 3. ディコンプレッションまでの形状の定式化

手法の検証を含め全断面有効の範囲での曲げモーメントと曲率の関係を先ず求める。プレストレス力  $P$  を均等に受けた状態を初期状態とし、柱の上端に曲げモーメントを作用させ、ディコンプレッションの状態まで曲げモーメント  $M$  が増加するときの柱上端の変位を求める。断面の圧縮側最外縁の応力度に着目し、中心軸の応力度からの増加応力度を  $a/2$  とすればディコンプレッション時には最外縁の圧縮応力度は  $a$  となる。 $a$  を変数とする曲率は  $\Phi = a / (E h)$  である。圧縮合力位置を柱の中心軸から  $e$  とすれば圧縮応力度の分布の重心を求めることにより  $e$  が求められる。すなわち、 $P e = a h^2 / 12$  より求められる。対応する曲げモーメントは  $M = P e$  であるので、 $M$  と  $\Phi$  の関係は次式で表される。 $I$  は断面2次モーメントである。

$$M = a h^2 / 12 = (\Phi E h) h^2 / 12 = \Phi E h^3 / 12 = \Phi EI \quad (1)$$

この式は梁理論における基本式として知られているものと同じであり、 $M$  と  $\Phi$  は直線関係にあり PC 部材の断面の合力の移動からも誘導することができる。

### 4. ディコンプレッション以降の形状の定式化

コンクリートの引張強度を無視するのでディコンプレッション以降の断面の応力分布は図-1 に示すように3角形分布であり、その面積はプレストレス力  $P$  に等しい。

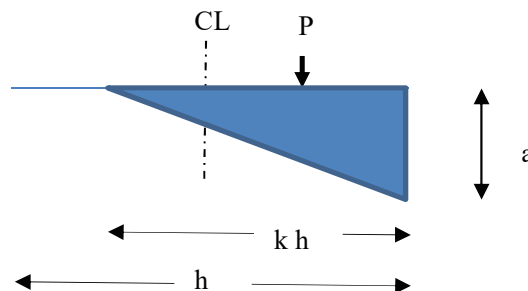


図-1 中立軸と合力の位置および記号

応力度がゼロとなる位置を中立軸とし、圧縮縁からの距離を  $kh$  とする。縁応力度を  $a$  とすれば  $P = a kh / 2$  である。対応する曲げモーメントと曲率は図-1 を参照し、それぞれ(2)式と(3)式で表される。

$$M = P (h / 2 - kh / 3) \quad (2)$$

$$\Phi = a / (E kh) \quad (3)$$

$k$  は  $a$  で表され、 $k = 2 P / (a h)$  である。以上の関係から  $M$  と  $\Phi$  の関係が求められる。

$$M = (P h / 6) ( 3 - 4 P / h \sqrt{2 \Phi P E} ) \quad (4)$$

ディコンプレッション状態での  $M$  を  $M_1$ 、 $\Phi$  を  $\Phi_1$  とすれば

$$M_1 = h P / 6 \quad (5)$$

$$\Phi_1 = 2 P / (h^2 E) \quad (6)$$

無次元表示として  $m = M / M_1$ 、 $\phi = \Phi / \Phi_1$  とすれば

$$m = 3 - \frac{2}{\sqrt{\phi}} \quad (7)$$

すなわち、バイリニア、トライリニアの形状はここで得られた非線形解の折れ線による解であって、ディコンプレッション以降のバイリニア的な変形挙動は厳密な非線形の式として(4)式および(7)式で表される。

(7) 式で  $\phi = 1, 4, 9$  とすれば、 $m$  の値は、それぞれ 1, 2, 7/3 となってバイリニア、トライリニアの場合と一致する。 $\phi$  が無限大のとき、 $m$  は 3 である。ただし、コンクリートの圧縮側は完全弾性体であり、引張抵抗はないと仮定した場合である。無次元化された曲げモーメントと曲率の関係である (7) 式を図示すれば **図-2** となる。

以上で得られた無次元化の関係は、これまで実験で得られた PC 柱の荷重と変位の関係<sup>3), 4), 5)</sup>を無次元化して評価する場合に極めて有用である。

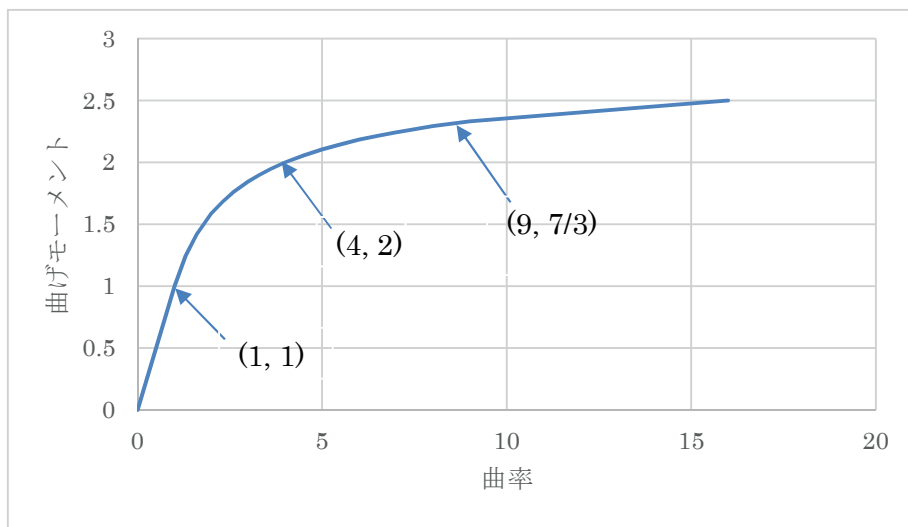


図-2 (7) 式による無次元化された曲げモーメントと曲率の関係

## 5. 弾性エネルギー—一定則への適用

### 5.1 バイリニア型による定式化

バイリニアの場合の弾性エネルギー—一定則による関係は次の(8)式で表される<sup>2), 6)</sup>。

$$c = \sqrt{\frac{(v+2)^2}{3} - 2} \quad (8)$$

ここで  $v$  はディコンプレッション時の変位の  $v$  倍の変位を示し、その場合の作用荷重または曲げモーメントがディコンプレッション時の値の  $c$  倍であることを示す。ただし、ここで  $1 \leq v \leq 4$  である。

### 5.2 トライリニア型による定式化

同様にトライリニアの場合の関係式は次の通りである。ただし  $4 \leq v \leq 9$  である。点(4,2)と点(9,7/3)

を通るトライリニアの第3直線は勾配が  $1/15$  であり  $y = x/15 + 26/15$  で表される。計算の容易な方法として線形弾性のひずみエネルギーを表わす面積をL, トライリニア弾性のひずみエネルギーを表わす面積をTとして両者が等しいとし,  $v$  を変数,  $c$  を解として以下のように定式化する。

$$L = \int_0^c x dx = \frac{1}{2} c^2 \quad (9)$$

$$T = \int_0^1 x dx + \frac{1}{3} \int_1^4 (x+2) dx + \frac{1}{15} \int_4^v (x+26) dx \quad (10)$$

L = T より

$$15 c^2 - v^2 - 52 v + 74 = 0 \quad (11)$$

$$c = \sqrt{\frac{(v+26)^2}{15} - 50} \quad (12)$$

(12)式で  $v$  を4とすれば  $c = \sqrt{10}$  となって (8) 式の場合と一致する。

なお,  $v$  を9とすれば  $c = 5.6$  であり, ディコンプレッション荷重の5倍の荷重が作用しても弾的に復元性を確保できる。緊張力をPC鋼材の降伏点の50%のパーシャルテンション(KEB設計法と称する<sup>6)</sup>)とすれば  $v$  を2倍の18程度まで弾性的復元性を確保できる。この場合の  $c$  は, 約9である。即ち, 「レベル1」の地震力の9倍の地震力に対して構造的健全度が期待できるのである。

### 5.3 トライリニア型の一般式による定式化

第3直線の始点は, 点(4,2)であり終点を点(p, q)として一般化する。この一般化は材料の非線形性を考慮するときには有用である。トライリニア直線のうちのバイリニア終点までの面積は5.0である。第3直線の始点から点(p, q)までの面積は以下のように求められる。

第3直線は (13) 式で表される。

$$y = a x + b \quad (13)$$

ここで,  $a = (q-2)/(p-4)$ ,  $b = 2(p-2q)/(p-4)$

トライリニアのひずみエネルギーは (14) 式で表わされる。

$$T = 5 + \int_4^v (ax + b) dx = 0.5 a v^2 + b v - 8 a - 4 b + 5 \quad (14)$$

線形弾性である第1直線のひずみエネルギーLは (9) 式で表わされる。

T=L より

$$c^2 - av^2 - 2bv + 16a + 8b - 10 = 0 \quad (15)$$

$$c = \sqrt{av^2 + 2bv - 16a - 8b + 10} \quad (16)$$

ただし,  $a = (q-2)/(p-4)$

$$b = 2(p-2q)/(p-4)$$

ここで,  $p=9$  および  $q=7/3$  を (16) 式に代入すると (12) 式が得られる。

### 5.4 トライリニア型の第3直線が水平の場合

第3直線を安全側として水平と仮定した場合, (13) 式は  $a=0, b=2$  である。

これを(16)式に代入すれば

$$c = \sqrt{4v - 6} \quad (17)$$

ただし,  $v$  は4以上である。 $v=9$  の時,  $c=5.4$  である。また,  $v=18$  の時,  $c=8.1$  である。

この式はニューマークの式に匹敵する簡潔な式である。

5.5 非線形解型による定式化

図-3に示す関係を用いて(7)式で求めた非線形解の弾性エネルギー一定則の定式化を行う。用いる記号はバイリニアおよびトライリニアの場合と同一である。

$$A = (c^2 - 1) / 2 - \int_1^c (3 - 2 / \sqrt{x}) dx \tag{18}$$

$$B = \int_c^v (3 - 2 / \sqrt{x}) dx \tag{19}$$

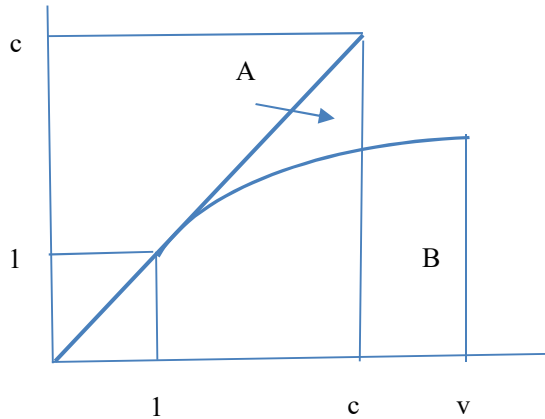


図-3 非線形解での A = B, および c, v の関係

ここで,  $\int_c^v (1 / \sqrt{x}) dx = 2\sqrt{v} - 2\sqrt{c}$

A = B として計算すると v と c の関係が得られる。

$$c^2 + 8\sqrt{v} - 6v - 3 = 0 \tag{20}$$

$$c = \sqrt{6v - 8\sqrt{v} + 3} \tag{21}$$

以上のように PC 部材のディコンプレッション以降の変形に関する明解で簡潔な定式化ができた。v と c の関係を表-1に示す。

表-1 抵抗地震力増加率 c に関するバイリニア式、トライリニア式および非線形解の値

v	(8)式 (バイリニア)	(12)式 (トライリニア)	(21)式(非線形解)	(8) or (12)/ (21)
1	1.0		1.0	1.0
2	1.82		1.92	0.95
4	3.16	3.16	3.32	0.95
6		4.27	4.40	0.97
9		5.63	5.74	0.98
16		(8.22)	8.19	(1.00)

表-1に示すようにバイリニア式とトライリニア式による値は非線形解の値の 95%以上で 100%以下であり、実用上では差異はないと考えられる。したがって、耐震設計で用いる場合はいずれも使用可能である。当然ながら v, すなわち, 変形が大きくなれば材料非線形の影響が出てくるので弾性的な復元性を求めるのであれば v 値に制限値を設けることが必要なことは当然である。

## 6. エネルギー一定則による耐震性の評価

弾性エネルギー一定則とニューマークのエネルギー一定則に関し、抵抗地震力増加率  $c$  を比較するとニューマークの式は  $\sqrt{2u-1}$  であり弾性エネルギー一定則の代表式は (21) 式である。鉄筋コンクリート (RC) の場合、ニューマークのエネルギー一定則で塑性率  $u$  が 9.0 となれば構造物は崩壊に近い状態となるがその場合の抵抗地震力増加率  $c$  はレベル 1 設計地震力の 4.1 倍である。これに対して PC の場合では変形率  $v$  が 9.0 となっても相当な復元性能を持ち、抵抗地震力増加率  $c$  はレベル 1 設計地震力の 5.7 倍の大地震に対して安全性と供用性が確保可能となる。この場合、簡潔な (17) 式を用いても 5.4 倍の値が得られる。なお、ここで RC では降伏開始時を、PC ではディコンプレッション時をレベル 1 の設計地震力として基本的な RC と PC の耐震性能を比較しその評価を述べた。

## 7. 結論

PC 部材のディコンプレッション以降の変形についてバイリニア、トライリニアおよび厳密な非線形解による定式化を行うことができた。ただし、耐震性能を考え、コンクリートの引張抵抗は無視されている。これらを用いて弾性エネルギー一定則を定式化し、数値的な比較をすることができた。すなわち、ディコンプレッション以降の  $M\Phi$  (モーメント・曲率) 関係を理論的に探究し、その  $M\Phi$  式が曲率  $\Phi$  の平方根を持つ極めて簡潔な式で表されることが明らかにされ、バイリニアおよびトライリニアの式は非線形の式の折れ線による表現であることが示された。これらの式は PC 柱の変形に関し無次元表示による普遍的なものである。また、バイリニア型の場合と同様にトライリニア型および非線形解の式を適用して弾性エネルギー一定則の定式化を行い数値的な比較を行った。以上の成果はプレストレストコンクリートの力学の基本的な事柄に関する全く新しい知見である。本論文に示された知見を構想設計 (Conceptual Design) の中に反映させ、PC 構造の卓越した耐震性による画期的な性能創造<sup>7)</sup>を行うことが今後の耐震技術にとって必須のことであると思われる。

## 参考文献

- 1) 池田尚治, 黒沢亮平, 平井圭, 山口隆裕, プレストレストコンクリート部材が持つ固有の復元力特性の探究, 第26回プレストレストコンクリートの発展に関するシンポジウム論文集, pp. 353-358, 2017年10月, プレストレストコンクリート工学会
- 2) 池田尚治, 黒沢亮平, 平井圭, 山口隆裕, 弾性エネルギー一定則によるPC構造物の耐震設計, 第27回プレストレストコンクリートの発展に関するシンポジウム論文集, pp. 103-108, 2018年11月, プレストレストコンクリート工学会
- 3) 池田尚治, 森拓也, 吉岡民夫, プレストレストコンクリート橋脚の耐震性に関する研究, プレストレストコンクリート技術協会誌, 第40巻5号, pp. 40-47, 1998年9月号
- 4) Ikeda, Shoji, Seismic Behavior of Reinforced Concrete Columns and Improvement by Vertical Prestressing, Proceedings of the 13<sup>th</sup> FIP Congress on Challenges for Concrete in the Next Millennium, Vol.2, pp. 879-884, 1998, Amsterdam
- 5) 鈴木宣政, 森拓也, 山口隆裕, 池田尚治, プレストレストコンクリート橋脚の復元力モデル, 第9回PCの発展に関するシンポジウム論文集, pp. 673-678, 1999年10月, PC技術協会
- 6) Ikeda, S., Kurosawa, R., Kurosawa, R., Hirai, K., Yamaguchi, T., Elastic Energy Balance Concept for the Design of Resilient Prestressed Concrete Structures against Repetitive Severe Earthquakes, Proceedings of 5<sup>th</sup> fib Congress, Paper No.197, Oct. 2018, Melbourne
- 7) コンクリート構造技術規準—性能創造による設計・施工・保全, プレストレストコンクリート工学会, 2019年3月策定 (2011年版規準の改訂版)