

曲線ばりを有する PC 固定脚ラーメン橋のプレストレスによる不静定二次断面力の計算法について (1)

森 元 峯 夫*

1. まえがき

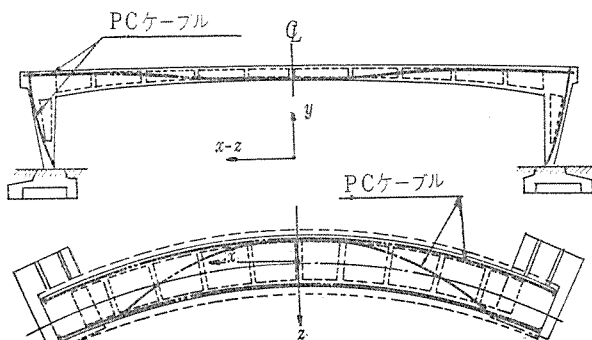
最近橋梁の橋軸は線路の線型にあわせて、曲線部では順次、直線橋より曲線橋に変わりつつあり、その構造も単純桁より連続桁等の不静定構造が採用されてきた。その応力解析も平面的なものから、立体的解析へと変って、合理的な設計が問題となっている。

ここに述べる PC 曲線固定脚ラーメン橋は図-1のように、はりが円弧で曲線をなしているもので、直線ばりからなる従来の固定脚ラーメンと異なり外力に対して6次不静定構造である。すなわち、はりおよび柱に水平たわみ、および回転が生じる結果、水平方向の曲げモーメント、せん断力とさらにねじりモーメントが作用するので設計は非常に複雑である。

このような構造物にプレストレスト コンクリートを用いると、プレストレスによる不静定二次断面力が外力による断面力に対して、一般に、有効に作用することと PC 部材はねじり抵抗が大きい等の理由から、この種の構造物に PC 構造が最も適していると思われる。現に Venezuela の Caracas¹⁾ ではスパン (弦長) 53.72 m の PC 曲線固定脚ラーメン橋が、フレシネー工法により建設されている。

このような状態を考え、この問題を取扱ったものであり、計算方法は計算を簡単にするため、図心法²⁾によった。この場合ラーメンは立体構造であるため、図心は座標 (x_0, y_0, z_0) により決まる空間図心を考え、この空間図心に不静定二次反力を作用させて弾性方程式を立てて解いた。なお構造は対称構造の場合を考えた。また外力に

図-1 曲線固定脚ラーメン橋



* ピー・エス・コンクリート KK 設計研究部設計課

よる断面力の解析については、参考文献 3) を参照されたい。

2. プレストレスと不静定二次反力

プレストレスによる不静定二次反力は外力が作用する場合と全く同様の方法により計算することができる。いま図-2のように、プレストレスによるモーメントおよび軸力を取扱い、前述の空間図心にプレストレスによる

図-2 二次反力および断面力とプレストレス

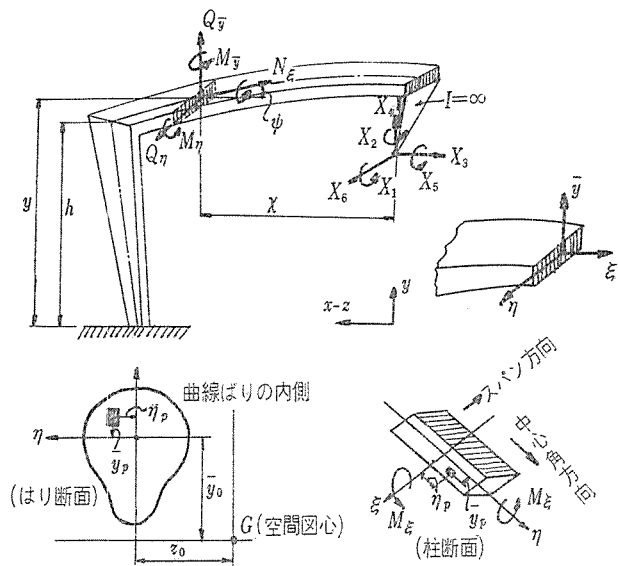
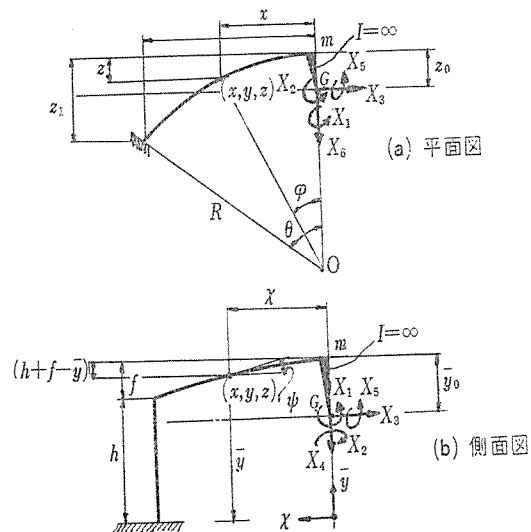


図-3 静定基本系



不静定二次反力を作用させる（この空間図心の座標 (x_0, \bar{y}_0, Z_0) については後述する）。

従って静定基本系としては図-3のごとく、はりの中央で切断して得られる2個の立体片持ばりを考える。この静定基本系について、各断面力は次のように付号の約束をする。

(1) プレストレス

プレストレスについては、断面に直角に作用する分力を P_t とし断面に対して平行な分力はせん断力であるから、これによる変形量は、値が僅少なので無視する。なお軸力は引張力を正と仮定するからプレストレスによる軸力は負の値をとり、偏心量の正負は図-2のごとき場合を、はりおよび柱について正とする。すなわち M_η に関して、はりにあっては水平軸 η より上側、柱にあってはラーメンの外側にある場合を正、 $M_{\bar{y}}$ に関しては、はりでは垂直軸 \bar{y} より、はりの曲率中心より外側にある場合を、また柱にあっては、 M_ξ について円弧のはりの内側にある場合をそれぞれ正とする。はりの水平曲げモーメント $M_{\bar{y}}$ は柱ではねじりモーメントであり、はりのねじりモーメント M_ξ は柱では曲げモーメントとなる。この場合静定基本系のプレストレスによる、ねじりモーメントは0であるから、 $M_{\bar{y}}$ および M_ξ のはりおよび柱での関係で、プレストレスによるねじりの項は考えず、曲げモーメントと軸力のみを考えるものとする。

(2) 不静定二次断面力と二次反力

プレストレスによる不静定二次断面力および反力は次のように約束する。

M_η : 曲げモーメントではりの下側に引張力を生ぜしめるものを正

$M_{\bar{y}}$: はりでは水平方向の曲げモーメントであり、はりの内側（曲率中心側）に引張力を生ぜしめるものを正とする。柱にあってはねじりモーメントである。

M_ξ : はりでは、ねじりモーメントであり時計まわりの方向を正とする。柱にあっては曲げモーメントを表わす。

M_ξ : 軸力で引張力を正とする。

$Q_{\bar{y}}$: 水平せん断力であり静定基本系 図-3 に示すような作用を正とする。

$Q_{\bar{y}}$: 垂直せん断力で 図-3 に示す場合を正とする。

以上のごとく各不静定二次反力プレストレスによる断面力および不静定二次断面力を選び付号も前記のように約束する。このように不静定二次反力を考え、これを前述の空間図心 G に作用させて静定基本系と考える。以上の6個の不静定二次反力を、さらに次のごとく X_i で表わすこととする。

$$M_\eta = X_1, M_{\bar{y}} = X_2, N_\xi = X_3, Q_{\bar{y}} = X_4, M_\xi = X_5, Q_\eta = X_6$$

(3) プレストレスによる静定基本系の断面力

プレストレスによる断面力は プレストレス モーメントおよび軸力であり前記 (1) の付号の約束に従い次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_\eta^p &= p_t \cdot \bar{y}_p, M_{\bar{y}}^p = p_t \cdot \eta, M_\xi^p = 0, \\ N_\xi^p &= -p_t, Q_\eta^p = Q_{\bar{y}}^p = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{(はりについて)} \\ \dots\dots(1) \\ \text{(柱について)} \end{array}$$

(ただし柱にあっては $Q_{\bar{y}}$ の方向が軸力となる)

(4) 不静定二次反力による断面力

プレストレスによる不静定二次反力による静定基本系の各断面力は次のようになる。

① $X_1=1$ による断面力

$$\left. \begin{aligned} M_{1\eta} &= +1 \cdot \cos \varphi \\ M_{1\xi} &= +1 \cdot \sin \varphi \cos \psi \\ M_{1\bar{y}} &= +1 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \sim 0 \\ Q_{1\bar{y}} &= N_{1\xi} = Q_{1\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

② $X_2=1$ による断面力

$$\left. \begin{aligned} M_{2\eta} &= +1 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \sim 0 \\ M_{2\xi} &= -1 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi \sim 0 \\ M_{2\bar{y}} &= +1 \cdot \cos \psi \\ Q_{2\bar{y}} &= N_{2\xi} = Q_{2\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

③ $X_3=1$ による断面力

空間図心 G に $X_3=1$ を作用させると、はりの中心点 m では軸力 $X_3=1$ と曲げモーメント (M_η と同性質) $1 \cdot \bar{y}_0$, および水平な曲げモーメント ($M_{\bar{y}}$ と同性質) $1 \cdot Z_0$ の3個の外力となるからこれらを付号を考えて合成すれば $X_3=1$ による断面力は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_{3\eta} &= +(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \cos \varphi \\ &\quad + (Z_0 - z) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \\ M_{3\xi} &= +(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi \\ &\quad - (Z_0 - z) \cos \varphi \cdot \sin \psi \\ M_{3\bar{y}} &= +(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \\ &\quad + (Z_0 - z) \cdot \cos \psi \\ N_{3\xi} &= +1 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi \\ Q_{3\eta} &= +1 \cdot \sin \varphi \\ Q_{3\bar{y}} &= -1 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

④ $X_4=1$ による断面力

空間図心に $X_4=1$ を作用させると、はりの中心点 m では $X_4=1$ の垂直せん断力と $1 \cdot Z_0$ のねじりモーメントが作用することになるから、これら2つの断面力を付号を考えて合成すれば $X_4=1$ による各断面力は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_{4\eta} &= 1 \cdot x \cdot \cos \varphi + (Z_0 - z) \sin \varphi \\ M_{4\xi} &= x \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi - (Z_0 - z) \cos \varphi \cdot \cos \psi \\ M_{4\bar{y}} &= x \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi - (Z_0 - z) \cos \varphi \cdot \sin \psi \sim 0 \\ Q_{4\bar{y}} &= 1 \cdot \cos \psi \\ Q_{4\eta} &= 0 \\ N_{4\xi} &= -1 \cdot \sin \psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

⑤ $X_5=1$ による断面力

$$\left. \begin{aligned} M_{5\eta} &= -1 \cdot \sin \varphi \\ M_{5\xi} &= +1 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi \\ M_{5\bar{y}} &= +1 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi \\ Q_{5\bar{y}} &= N_{5\xi} = Q_{5\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

⑥ $X_6=1$ による断面力
空間図心 G に $X_6=1$ を作用させれば、はりの中心点 m では $X_6=1$ の水平せん断力と $-1 \cdot \bar{y}_0$ のねじりモーメントが作用するから、この両者の付号を考慮して合成すれば各断面力は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_{6\eta} &= +1(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi \\ &\quad + 1 \cdot x \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \\ M_{6\xi} &= -1 \cdot (\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cos \varphi \cdot \cos \psi \\ &\quad - 1 \cdot x \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi \\ M_{6\bar{y}} &= -1 \cdot (\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi \\ &\quad - 1 \cdot x \cdot \cos \psi \\ Q_{6\eta} &= +1 \cdot \cos \varphi \\ N_{6\xi} &= +1 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi \\ Q_{6\bar{y}} &= +1 \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

3. 弾性方程式とその解

前記のようにして、プレストレスおよび不静定二次反力 X_i による静定基本系の各断面力が計算されたので、これらの各断面力による任意点 i の変位量 δ_{ik} は次式によって計算される。ただし、せん断力による影響は値が僅少なため無視した。

$$\begin{aligned} EJ_c \cdot \delta_{ik} &= \sum^{R+S} M_{i\eta} \cdot M_{k\eta} \cdot \Delta S \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^R M_{i\xi} \cdot M_{k\xi} \Delta S \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi D} \cdot G} \\ &\quad + \sum^S M_{i\xi} \cdot M_{k\xi} \cdot \Delta S \frac{J_c}{J_\xi} + \sum^R M_{i\bar{y}} \cdot M_{k\bar{y}} \cdot \Delta S \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} \\ &\quad + \sum^S M_{i\bar{y}} \cdot M_{k\bar{y}} \cdot \Delta S \frac{J_c \cdot E}{J_{\bar{y}0} \cdot G} \\ &\quad + \sum^{R+S} N_i \cdot N_k \cdot \Delta S \frac{J_c}{A} \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

(8) 式において J_c は、はりの中央断面の η 軸に関する断面二次モーメントを用い、 $J_{\xi D}, J_{\bar{y}0}$ は、おのおのの断面の極モーメントである。また \sum^{R+S} は、はりおよび柱に関する全体の総和を表わし、 \sum^R ははりについて、 \sum^S は柱について計算するものである。

(8) 式により δ_{ik} を求め、プレストレスと不静定二次

反力に関する弾性方程式を立てれば次の (9) 式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{01} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} + X_4 \cdot \delta_{14} + X_5 \cdot \delta_{15} + X_6 \cdot \delta_{16} &= 0 \\ \delta_{02} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} + X_4 \cdot \delta_{24} + X_5 \cdot \delta_{25} + X_6 \cdot \delta_{26} &= 0 \\ \vdots &\vdots \\ \delta_{05} + X_1 \cdot \delta_{51} + X_2 \cdot \delta_{52} + X_3 \cdot \delta_{53} + X_4 \cdot \delta_{54} + X_5 \cdot \delta_{55} + X_6 \cdot \delta_{56} &= 0 \\ \delta_{06} + X_1 \cdot \delta_{61} + X_2 \cdot \delta_{62} + X_3 \cdot \delta_{63} + X_4 \cdot \delta_{64} + X_5 \cdot \delta_{65} + X_6 \cdot \delta_{66} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

(9) 式において、 $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ であり、 $\delta_{ik} = 0$ (ただし $i \neq k$) となるような空間図心 G を選ぶから、すべて $\delta_{ik} = 0 (i \neq k)$ となり X_i に関する変位量の項はすべて $\delta_{0i}, \delta_{ii} (i=1, 2, \dots, 6)$ となり δ_{0i}, δ_{ii} を合計 12 個求めることによって X_i 6 個がただちに求められる。以上のことから $X_i (i=1, 2, \dots, 6)$ は次式によって求められる。

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \ominus \frac{\delta_{01}}{\delta_{11}}, \quad X_2 = \ominus \frac{\delta_{02}}{\delta_{22}}, \quad X_3 = \ominus \frac{\delta_{03}}{\delta_{33}} \\ X_4 &= \ominus \frac{\delta_{04}}{\delta_{44}}, \quad X_5 = \ominus \frac{\delta_{05}}{\delta_{55}}, \quad X_6 = \ominus \frac{\delta_{06}}{\delta_{66}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

4. 各不静定二次反力の計算

(1) X_1 (曲げモーメント) の計算

(10) 式より X_1 は求められる。この場合 δ_{0i}, δ_{ii} は次のようになる。

$$\begin{aligned} EJ_c \cdot \delta_{01} &= \sum^{R+S} p_t \cdot \bar{y}_p \cdot \cos \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} \\ &\quad + \sum^S p_t \cdot \eta_p \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} \\ &\quad + \sum^R p_t \cdot \eta_p \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EJ_c \cdot \delta_{11} &= \sum^{R+S} \cos^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^R \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi D} \cdot G} \\ &\quad + \sum^S \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} \\ &\quad + \sum^R \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} \\ &\quad + \sum^S \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\bar{y}0} \cdot G} \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

(10), (11), (12) 式より X_1 は計算できる。

いま、はりの軸線が水平な場合すなわち $\psi = 0$ の場合には (実際設計ではこのように考えてよいと思われる)、 $\sin \psi = 0, \cos \psi = 1$ を代入して、おのおの δ_{01}, δ_{11} は次のようになる。

$$\begin{aligned} EJ_c \cdot \delta_{01} &= \sum^{R+S} p_t \cdot \bar{y}_p \cdot \cos \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} \\ &\quad + \sum^S p_t \cdot \eta_p \cdot \sin \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EJ_c \cdot \delta_{11} &= \sum^{R+S} \cos^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} \\ &\quad + \sum^R \sin^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi D} \cdot G} \\ &\quad + \sum^S \sin^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

$$\therefore X_1 = \ominus \frac{\sum^{R+S} p_t \cdot \bar{y}_p \cdot \cos \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^S p_t \cdot \eta_p \cdot \sin \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi}}{\sum^{R+S} \cos^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^R \sin^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi D} \cdot G} + \sum^S \sin^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi}} \dots (15)$$

はりの軸線が水平な場合の X_1 の値

(2) X_2 (曲げモーメント) の計算

X_1 に関する計算と同様に,

$$EJ_c \cdot \delta_{02} = \sum^{R+S} p_t \cdot \bar{y}_p \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} - \sum^S p_t \cdot \eta_p \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} + \sum^R p_t \cdot \eta_p \cdot \cos \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} \dots (16)$$

$$EJ_c \cdot \delta_{22} = \sum^{R+S} \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^R \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi D} \cdot G} + \sum^S \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} + \sum^R \cos^2 \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} + \sum^S \cos^2 \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\bar{y} D} \cdot G} \dots (17)$$

(10), (16), (17) 式によって X_2 は計算できる。 X_1 と同様に, はりの軸線が水平な場合には, $\sin \psi = 0, \cos \psi = 1$ であるから X_2 は次の (18) 式で計算される。

$$X_2 = \ominus \frac{\sum^R p_t \cdot \eta_p \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}}}{\sum^R \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} + \sum^S \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\bar{y} D} \cdot G}} \dots (18)$$

はりの軸線が水平な場合の X_2 の値

(3) X_3 (軸力) の計算

X_3 の計算も X_1, X_2 と同様に計算され δ_{03}, δ_{33} は次のようになる。

$$EJ_c \cdot \delta_{03} = \sum^{R+S} p_t \cdot \bar{y}_p [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \cos \varphi + (Z_0 - z) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi] \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^S p_t \cdot \eta_p [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi - (Z_0 - z) \cos \varphi \cdot \sin \psi] \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi}$$

$$- (Z_0 - z) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi] \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} + \sum^R p_t \cdot \eta_p [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi + (Z_0 - z) \cdot \cos \psi] \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} + \sum^R (-p_t) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi \Delta S \cdot \frac{J_c}{A} + \sum^S p_t \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi \Delta S \cdot \frac{J_c}{A} \dots (19)$$

$$EJ_c \cdot \delta_{33} = \sum^{R+S} [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \cos \varphi + (Z_0 - z) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi]^2 \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^R [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi - (Z_0 - z) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi]^2 \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi D} \cdot G} + \sum^S [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \sin \varphi \cdot \cos \psi - (Z_0 - z) \cos \varphi \cdot \sin \psi]^2 \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} + \sum^R [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi + (Z_0 - z) \cos \psi]^2 \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\bar{y} D} \cdot G} + \sum^S [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi + (Z_0 - z) \cos \psi]^2 \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} + \sum^R \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{A} + \sum^S \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \psi \Delta S \cdot \frac{J_c}{A} \dots (20)$$

(10), (19), (20) 式より X_3 は計算できる。前と同様, はりの軸線が水平な場合には $\sin \psi = 0, \cos \psi = 1, f = 0$ である (はりでは従って, $(h + f - \bar{y}) = 0$)。

$$\therefore X_3 = \ominus \frac{\bar{y}_0 \cdot \sum^R p_t \cdot \bar{y}_p \cdot \cos \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^S p_t \cdot \bar{y}_p \cdot (\bar{y}_0 - h + \bar{y}) \cdot \cos \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta}}{\bar{y}_0 \sum^R \cos^2 \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^S (\bar{y}_0 - h + \bar{y})^2 \cdot \cos^2 \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \bar{y}_0^2 \sum^R \sin^2 \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi D} \cdot G}} + \frac{\sum^S p_t \cdot \eta_p \cdot (\bar{y}_0 - h + \bar{y}) \cdot \sin \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} + \sum^R p_t \cdot \eta \cdot (Z_0 - z) \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} - \sum^R p_t \cdot \cos \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{A}}{\sum^S (\bar{y}_0 - h + \bar{y})^2 \cdot \sin^2 \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} + \sum^S (Z_0 - z)^2 \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\bar{y} D} \cdot G} + \sum^R (Z_0 - z)^2 \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} + \sum^R \cos^2 \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{A}} \dots (21)$$

はりの軸線が水平な場合の X_3 の値

(4) X_4 (せん断力) の計算

構造物が対称であることと、静定基本系の X_i の作用方向を考えると、 $X_4=0$ なることが容易にわかる。すなわち、 $\delta_{04}=0$ となるからである。

$$X_4=0 \dots\dots\dots(22)$$

(5) X_5 (ねじりモーメント) の計算

$$EJ_c \cdot \delta_{05} = - \sum^{R+S} p_t \cdot \bar{y}_p \cdot \sin \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^S p_t \cdot \eta_p \cos \varphi \cdot \cos \psi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} + \sum^R p_t \cdot \eta_p \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} \dots\dots\dots(23)$$

$$EJ_c \cdot \delta_{55} = \sum^{R+S} \sin^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^R \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \psi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\xi D}} \cdot \frac{E}{G} + \sum^S \cos^2 \varphi \cdot \cos^2 \psi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} + \sum^R \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \psi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} + \sum^S \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \psi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}_0}} \cdot \frac{E}{G} \dots\dots\dots(24)$$

(10), (23), (24) 式より X_5 は計算できる。はりの軸線が水平な場合には、 $\sin \psi=0, \cos \psi=1$ であるから、 X_5 は次のようになる。

$$X_5 = \ominus \frac{- \sum^{R+S} p_t \cdot \bar{y}_p \cdot \sin \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^S p_t \cdot \eta_p \cdot \cos \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi}}{\sum^{R+S} \sin^2 \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^R \cos^2 \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi_0} \cdot G} + \sum^S \cos^2 \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi}} \dots\dots\dots(25)$$

はりの軸線が水平な場合の X_5 の値

(6) X_6 (せん断力) の計算

$$EJ_c \delta_{06} = \sum^{R+S} p_t \cdot \bar{y}_p [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi + x \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi] \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^S p_t \cdot \eta_p [-(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi - x \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi] \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} + \sum^R p_t \cdot \eta_p [-(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi - x \cdot \cos \psi] \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} - \sum^R p_t \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi \Delta S \cdot \frac{J_c}{A} - \sum^S p_t \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \Delta S \cdot \frac{J_c}{A} \dots\dots\dots(26)$$

$$- x \cos \varphi \cdot \sin \psi]^2 \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi_0} \cdot G} + \sum^S [-(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi - x \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi]^2 \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} + \sum^R [-(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cos \varphi \cdot \sin \psi - x \cdot \cos \psi]^2 \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} + \sum^S [-(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi - x \cdot \cos \psi]^2 \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\bar{y}_0} \cdot G} + \sum^R \sin^2 \varphi \cdot \cos^2 \psi \Delta S \cdot \frac{J_c}{A} + \sum^S \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \psi \Delta S \cdot \frac{J_c}{A} \dots\dots\dots(27)$$

$$EJ_c \cdot \delta_{66} = \sum^{R+S} [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi + x \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi]^2 \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^R [-(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cos \varphi \cdot \cos \psi$$

ここで、 $\sum M_{\bar{y}}^p \cdot M_{\bar{y}_0} \Delta S = 0, \sum M_{\xi}^p \cdot M_{\xi_0} \Delta S = 0, \sum N_{\xi}^p \cdot N_{\xi_0} \Delta S = 0$ であることを考え、はりの軸線が水平な場合には $\sin \psi=0, \cos \psi=1$ であり、はりでは $(h+f-\bar{y})=0$ であるから X_6 は次のようになる。

$$X_6 = \ominus \frac{\bar{y}_0 \sum^R p_t \cdot \bar{y}_p \cdot \sin \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^S p_t \cdot \bar{y}_p (\bar{y}_0 - h + \bar{y}) \sin \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta}}{\sum^{R+S} (\bar{y}_0 - h + \bar{y})^2 \cdot \sin^2 \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\eta} + \sum^R (\bar{y}_0 - h + \bar{y})^2 \cdot \cos^2 \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi_0} \cdot G} - \sum^S p_t \cdot \eta_p \cdot (\bar{y}_0 - h + \bar{y}) \cos \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} \times \frac{J_c}{J_\xi} + \sum^S (\bar{y}_0 - h + \bar{y})^2 \cdot \cos^2 \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_\xi} + \sum^R x^2 \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} + \sum^S x^2 \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\bar{y}_0} \cdot G} + \sum^R \sin^2 \varphi \Delta S \cdot \frac{J_c}{A}} \dots\dots\dots(28)$$

はりの軸線が水平な場合の X_6 の値

以上のようにして、(15), (18), (21), (22), (25), (28) 式より $X_i (i=1, 2, \dots, 6)$ を求めることができる。

5. 不静定二次断面力の計算

4.のごとくして不静定二次反力が計算されたので、こ

れによる各断面の不静定二次断面力は次のように求められる。

一般に $S = \sum_{i=1}^6 S_i X_i$ で求められる。ここに S は任意断面の断面力であり S_i は $X_i=1$ による 静定基本系の断面力で 2.(4) で求められた値である。 X_i は不静定二次反力である。

(1) $M_{\bar{y}}$ について

$$M_{\bar{y}} = \cos \varphi \cdot X_1 + \sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot X_2 + [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \cos \varphi + (Z_0 - z) \sin \varphi \cdot \sin \psi] X_3 - \sin \varphi \cdot X_5 + [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi + x \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi] X_6 \dots (29)$$

はりの軸線が水平な場合には、

はりについて、

$$M_{\bar{y}} = \cos \varphi \cdot X_1 + \bar{y}_0 \cdot \cos \varphi \cdot X_3 - \sin \varphi \cdot X_5 + \bar{y}_0 \cdot \sin \varphi \cdot X_6 \dots (30)$$

柱について、

$$M_{\bar{y}} = \cos \theta \cdot X_1 + (\bar{y}_0 - h + \bar{y}) \cdot \cos \theta \cdot X_3 - \sin \theta \cdot X_5 + (\bar{y}_0 - h + \bar{y}) \cdot \sin \theta \cdot X_6 \dots (31)$$

(2) $M_{\bar{x}}$ について

$$M_{\bar{x}} = \sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot X_1 - \cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot X_2 + [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \sin \varphi \cdot \cos \psi - (Z_0 - z) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi] X_3 + \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot X_5 - [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi + x \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi] X_6 \dots (32)$$

はりの軸線が水平な場合には、

はりについて (ねじりモーメント)

$$M_{\bar{x}} = \sin \varphi \cdot X_1 + \bar{y}_0 \cdot \sin \varphi \cdot X_3 + \cos \varphi \cdot X_5 - \bar{y}_0 \cdot \cos \varphi \cdot X_6 \dots (33)$$

柱について (曲げモーメント)

$$M_{\bar{x}} = \sin \theta \cdot X_1 + (\bar{y}_0 - h + \bar{y}) \cdot \sin \theta \cdot X_3 + \cos \theta \cdot X_5 - (\bar{y}_0 - h + \bar{y}) \cdot \cos \theta \cdot X_6 \dots (34)$$

(3) $M_{\bar{z}}$ について

$$M_{\bar{z}} = \sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot X_1 + \cos \varphi \cdot X_2 + [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi + (Z_0 - z) \cdot \cos \psi] X_3 + \cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot X_5 + [-(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi - x \cdot \cos \psi] X_6 \dots (35)$$

はりの軸線が水平な場合には、

はりについて (曲げモーメント)

$$M_{\bar{z}} = X_2 + (Z_0 - z) \cdot X_3 - x \cdot X_6 \dots (36)$$

柱について (ねじりモーメント)

$$M_{\bar{z}} = X_2 + (Z_0 - z) \cdot X_3 - x \cdot X_6 \dots (37)$$

(4) $Q_{\bar{y}}$ について

$$Q_{\bar{y}} = -\cos \varphi \cdot \sin \psi \cdot X_3 + \sin \varphi \cdot \sin \psi \cdot X_6 \dots (38)$$

はりの軸線が水平な場合には、はりおよび柱について、

$$Q_{\bar{y}} = 0 \dots (39)$$

(5) $Q_{\bar{z}}$ について

$$Q_{\bar{z}} = \sin \varphi \cdot X_3 + \cos \varphi \cdot X_6 \dots (40)$$

はりの軸線が水平な場合にも、はりおよび柱について、(40) 式がそのまま使用される。

(6) $N_{\bar{x}}$ について

$$N_{\bar{x}} = \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot X_3 + \sin \varphi \cdot \cos \psi \cdot X_6 \dots (41)$$

はりの軸線が水平な場合には、はりおよび柱について、

$$N_{\bar{x}} = \cos \varphi \cdot X_3 + \sin \varphi \cdot X_6 \dots (42)$$

以上のごとくしてプレストレスによる不静定二次反力および二次断面力を計算することができる。数値計算にあたっては、 X_5, X_6 の値は一般に値が小さいので、近似的には省略してもよいと思われる。また柱に関する $\sin \varphi, \sin^2 \varphi$ の乗ぜられる項も値が小さいので無視してもよいと思われる。

6. 空間図心 G の座標 x_0, \bar{y}_0, Z_0 の決定

先に求められた不静定二次反力の作用点、すなわち空間図心 G の座標 x_0, \bar{y}_0, Z_0 を求める必要がある。 x_0 は対称構造を取扱っているから当然はりの中央に位置する。この G は不静定二次反力による変形量 $\delta_{ik}=0$ となるように選んだので、 $\delta_{ik}=0$ の条件式から求められるものである。この $\delta_{ik}=0$ の条件式は次の 15 組となる。この場合 $\delta_{ik}=\delta_{ki}$ である。

すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \delta_{12}=0, \delta_{13}=0, \delta_{14}=0, \delta_{15}=0, \delta_{16}=0 \\ \delta_{23}=0, \delta_{24}=0, \delta_{25}=0, \delta_{26}=0, \delta_{34}=0, \delta_{35}=0, \delta_{36}=0 \\ \delta_{45}=0, \delta_{46}=0, \delta_{56}=0 \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

(43) 式において、 $\delta_{12}=0, \delta_{13}=0, \delta_{25}=0, \delta_{26}=0, \delta_{34}=0, \delta_{35}=0, \delta_{46}=0$ 等は構造の対称性と X_i の作用のしかたから容易に $\delta_{ik}=0$ なることがわかる。また $\delta_{13}=0, \delta_{16}=0, \delta_{35}=0, \delta_{56}=0, \delta_{24}=0$ 等より \bar{y}_0, Z_0 は連立に解くことによって決定される。ここでは、はりの軸線が水平な場合を考えると、 \bar{y}_0, Z_0 はおのおの独立に解くことができ、しかもそれらの値は当然等しい (これらのくわしい関係については紙面の関係上省略する) ので、ここでは \bar{y}_0 、および Z_0 を次の条件式から求めることとする。

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_0 \text{ については } \delta_{13}=0 \\ Z_0 \text{ については } \delta_{45}=0 \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

(1) Z_0 の計算

Z_0 は $\delta_{45}=0$ より決定される。

$$EJ_c \cdot \delta_{45} = 0 = - \sum^{R+S} \sin \varphi \cdot [x \cdot \cos \varphi + (Z_0 - z) \sin \varphi] \cdot 4 S \cdot \frac{J_c}{J_{\bar{y}}} + \sum^R \cos \varphi \cdot \cos \psi [(z \cdot \cos \varphi + x \cdot \sin \varphi) \cos \psi$$

$$\begin{aligned}
 & -Z_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi D} \cdot G} \\
 & + \sum^S \cos \varphi \cdot \cos \psi [(z \cdot \cos \varphi + x \cdot \sin \varphi) \cdot \cos \psi \\
 & - Z_0 \cdot \cos \varphi \cdot \cos \psi] \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\xi}} \\
 & + \sum^R \cos \varphi \cdot \sin \psi [(z \cdot \cos \varphi + x \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \psi \\
 & - Z_0 \cos \varphi \cdot \sin \psi] \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\eta}} \\
 & Z_0 = \frac{\sum^{R+S} z \cdot \sin^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\xi}} + \sum^R z \cdot \cos^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi D} \cdot G} + \sum^S z \cdot \cos^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\xi}}}{\sum^{R+S} \sin^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\eta}} + \sum^R \cos^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi D} \cdot G} + \sum^S \cos^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\xi}}} \dots (46)
 \end{aligned}$$

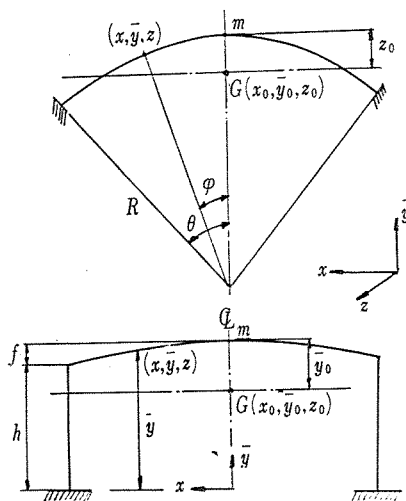
(2) \bar{y}_0 の計算

\bar{y}_0 は $\delta_{13}=0$ より計算される。

$$\begin{aligned}
 EJ_c \cdot \delta_{13} = 0 &= \sum^{R+S} \cos \varphi [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \cos \varphi \\
 & + (Z_0 - z) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi] \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\eta}} \\
 & + \sum^R \sin \varphi \cdot \cos \psi [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi \\
 & - (Z_0 - z) \cos \varphi \cdot \sin \psi] \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi D} \cdot G} \\
 & + \sum^S \sin \varphi \cdot \cos \psi [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi \cdot \cos \psi \\
 & - (Z_0 - z) \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi] \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\xi}}
 \end{aligned}$$

$$\bar{y}_0 = \frac{\sum^S \cos^2 \varphi (h - \bar{y}) \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\eta}} + \sum^S \sin^2 \varphi (h - \bar{y}) \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\xi}}}{\sum^{R+S} \cos^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\eta}} + \sum^R \sin^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi D} \cdot G} + \sum^S \sin^2 \varphi \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\xi}}} \dots (48)$$

図-4 空間図心



以上のようにして、 \bar{y}_0, Z_0 が決定される。直線ばりの場合には (46), (47) 式等に $R = \infty, \sin \varphi = 0, \cos \varphi = 1, z = R(1 - \cos \varphi) = 0$ 等の条件を入れればすべて求められる。その結果は完全に普通の固定脚ラーメン橋の場合と一致する。すなわち $X_2 = 0, X_5 = 0, X_6 = 0, Z_0 = 0$ となり、 \bar{y}_0 は、

$$\begin{aligned}
 & + \sum^S \cos \varphi \cdot \sin \psi [(z \cdot \cos \varphi + x \cdot \sin \varphi) \cdot \sin \psi \\
 & - Z_0 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \psi] \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi D} \cdot G} \\
 & \dots (45)
 \end{aligned}$$

(45) 式において $\sin \psi = 0, \cos \psi = 1$ さらに対称構造であるため x の 1 次に関する項はすべて 0 であることを考えて Z_0 を求めれば次のようになる。

$$\begin{aligned}
 & + \sum^R \sin \varphi \cdot \sin \psi [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \\
 & + (Z_0 - z) \cdot \cos \psi] \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\eta}} \\
 & + \sum^S \sin \varphi \cdot \sin \psi [(\bar{y}_0 - h - f + \bar{y}) \cdot \sin \varphi \cdot \sin \psi \\
 & + (Z_0 - z) \cos \psi] \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c \cdot E}{J_{\xi D} \cdot G} \\
 & \dots (47)
 \end{aligned}$$

(47) 式で $\sin \psi = 0, \cos \psi = 1$ を代入し、はりについて $(h + f - \bar{y}) = 0$ の条件を入れて求められた \bar{y}_0 の値は次のようである。

$$\bar{y}_0 = \frac{\sum^S (h - \bar{y}) \cdot \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\eta}}}{\sum^{R+S} \Delta S \cdot \frac{J_c}{J_{\eta}}} \dots (49)$$

となり、直線の固定脚ラーメン橋の弾性図心と一致することがわかる。このようなことからいえば、曲線ばりの場合を求めておけば直線ばりは曲線ばりの特殊な場合であるといえる。

以上のようにして PC 曲線固定脚ラーメン橋のプレストレスによる不静定二次反力および断面力が計算される。また、この不静定二次断面力におよぼすコンクリートのクリープおよび乾燥収縮の影響等についても考えておくべき問題と思われるが、著者が以前、「PC 2 ヒンジラーメンのプレストレスによる不静定二次反力にコンクリートのクリープおよび乾燥収縮がおよぼす影響について」⁴⁾の理論解と大川橋(PC 2 ヒンジラーメン橋)について実際計算した結果や Habel⁵⁾の論文等から推定して影響が、一般に小さいので実際設計では考慮しなくてもよいと思われるが一応研究課題としては残ると思われる。

以上、曲線ばりを有する PC 固定脚ラーメン橋のプレストレスによる不静定二次反力および断面力の計算法