

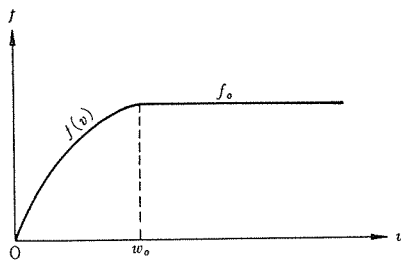
# 有限長PC舗装版の摩擦応力

猪 股 俊 司\*

## 1. 従来の研究

コンクリート舗装版が路盤上で滑動するとき、路盤と舗装版との間に作用する摩擦抵抗によって、コンクリート舗装版には拘束応力度が作用する。プレストレストコンクリート舗装においては、この摩擦抵抗を減少させる目的で、路盤と舗装版との間に砂層を設けている。したがって、摩擦抵抗は砂の内部摩擦角にのみ関係するものと考えられるが、実際の場合、湿度の影響による粘着力も作用するため、舗装版と路盤との間の摩擦現象には、これら2つの要素が含まれていると考えられる。単位長当りの摩擦抵抗力  $f$  は舗装版移動量  $v$  の関数で与えられることが測定されている<sup>1),2)</sup>。この  $f$  と  $v$  との関係は図-1 に示すように、ある移動量  $w_0$  に対し、 $v < w_0$  区間では  $f(v)$  であり、 $v > w_0$  区間では一定値  $f_0$  となり移動量とは無関係である。

図-1 移動量  $v$  と摩擦抵抗  $f$  との関係



$f(v)$  の形式として Friberg<sup>2),3)</sup> はつぎのようにした。

$$v < w_0 \quad f = f_0 \sqrt[n]{\frac{v}{w_0}}$$

$$v > w_0 \quad f = f_0$$

一般に  $n=2\sim 4$  であり、計算では  $n=3$  とした。

Peltier<sup>4)</sup> はつぎのように仮定した。

$$v < w_0 \quad f = f_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{v}{w_0}\right)$$

$$v > w_0 \quad f = f_0$$

この他 Koepcke<sup>5)</sup> は  $v < w_0$  区間で  $f$  と  $v$  とは直線比例関係にあると仮定した。

\* 工博 (株) 日本構造橋梁研究所

以上いずれの仮定に従うとしても半無限長舗装版についての基本微分方程式は比較的容易であって、いずれもその一般解法を示しているが、有限長舗装版についての解法は示されていない。

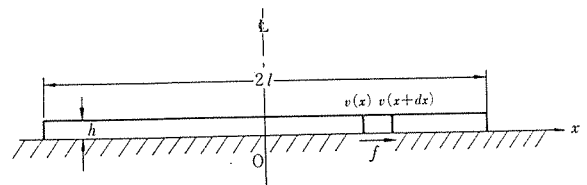
著者は、本論文において、Legendre の第一種積分を用いることによって、有限長舗装版の拘束応力を求めることが可能であることを示し、数値計算例を示した。

## 2. 有限長舗装版の路盤上滑動理論

版厚  $h$ 、単位容積重量  $\rho$ 、長さ  $2l$  なる舗装版に、無拘束ひずみ  $m$  が作用するものとする。これはプレストレッシング時は  $\sigma_0/E$  であり、温度変化の場合は  $\alpha T$  である。ここに、 $\alpha$ : 温度膨張係数、 $T$ : 温度変化  
コンクリートヤング係数は一定で  $E$  とする。

図-2 において  $x$  軸原点を舗装版長の中央にとる。コンクリート応力および無拘束ひずみはコンクリート版に短縮ひずみを与えるものを正とする。よって移動量  $v$  もまた  $x$  軸原点方向に向うものを正とするから、摩擦力  $f$  は図-2 のように  $x$  軸正方向に向う。

図-2 有限長舗装版



微小長  $dx$  区間での力のつり合式は、拘束応力度を  $\sigma_f$  で表わして、次式で与えられる。

$$h \sigma_f(x+dx) - h \sigma_f(x) - f \cdot dx = 0$$

すなわち、

$$h \frac{d\sigma_f}{dx} = f \quad \dots\dots\dots (1)$$

$dx$  区間でのひずみについて次式が求まる。

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\sigma_f}{E} + m \quad \dots\dots\dots (2)$$

式(2)を  $x$  で微分し、式(1)を用いる。

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma_f}{dx} = \frac{1}{Eh} f \quad \dots\dots\dots (3)$$

摩擦抵抗力  $f$  をつぎのように仮定する<sup>4)</sup>。

$$v \leq w_0 \quad f = f_0 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{v}{w_0}\right) \dots\dots\dots(4a)$$

$$v > w_0 \quad f = f_0 \dots\dots\dots(4b)$$

$$\text{ここに, } f_0 = \mu h \rho \dots\dots\dots(4c)$$

$\mu$ : 摩擦係数  $\rho$ : コンクリート単位容積重量

$x=0$  断面は左右対称であるから,  $v=0$  である。したがって, 舗装版中央区間では移動量  $v$  は小さい。よって,  $v \leq w_0$  である区間では式 (3) に式 (4a), (4c) を代入して, つぎの微分方程式が成立する。

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{f_0}{Eh} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{v}{w_0}\right) = \frac{\mu\rho}{E} \sin\beta v \dots\dots\dots(5)$$

$$\text{ここに, } \beta = \frac{\pi}{2} \frac{1}{w_0}$$

式 (5) の両辺に  $2 \frac{dv}{dx}$  を乗ずる。

$$2 \frac{d^2v}{dx^2} \frac{dv}{dx} = \frac{2\mu\rho}{E} \sin\beta v \left(\frac{dv}{dx}\right)$$

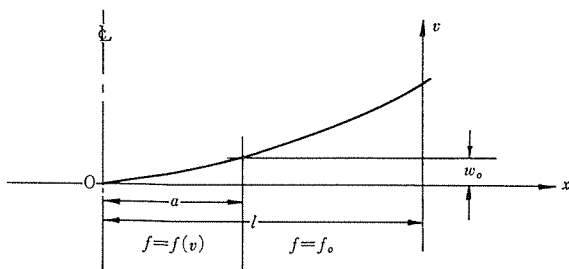
$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = -\frac{2\mu\rho}{E\beta} \frac{d}{dx} \cos\beta v$$

両辺を  $x$  で積分し, 積分定数を  $K$  とする。

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = K - \frac{2\mu\rho}{E\beta} \cos\beta v \dots\dots\dots(6)$$

$x=a$  断面で  $v=w_0$  となるものと仮定する (図-3)。

図-3 舗装版移動量と摩擦抵抗分布



また,  $x=a$  におけるコンクリートひずみ ( $dv/dx$ ) を,  $(dv/dx)_a$  で表わすと, 式 (6) で  $v=w_0$  であるから,

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_a^2 = K - \frac{2\mu\rho}{E\beta} \cos\frac{\pi}{2} = K$$

したがって, 式 (6) はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 &= \left(\frac{dv}{dx}\right)_a^2 - \frac{2\mu\rho}{E\beta} \cos\beta v \\ &= \left(\frac{dv}{dx}\right)_a^2 - \frac{2\mu\rho}{E\beta} \left(1 - 2\sin^2\frac{\beta v}{2}\right) \\ &= \left\{ \left(\frac{dv}{dx}\right)_a^2 - \frac{2\mu\rho}{E\beta} \right\} + \frac{4\mu\rho}{E\beta} \sin^2\frac{\beta v}{2} \\ &\dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

$x > a$  では摩擦力  $f$  は一定で式 (4b) で与えられ, 式 (3), 式 (4b), (4c) を用いて,

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\mu\rho}{E} \dots\dots\dots(8)$$

式 (8) を積分し, 積分定数を  $A, B$  とすると,

$$\frac{dv}{dx} = \frac{\mu\rho}{E} x + A \dots\dots\dots(9)$$

$$v = \frac{\mu\rho}{2E} x^2 + Ax + B \dots\dots\dots(10)$$

舗装版自由端では, 拘束応力  $\sigma_f$  は 0 であるから, 式 (2)【(3) から,  $x=l, \sigma_f=0$  とおいて

$$A = m - \frac{\mu\rho}{E} l \dots\dots\dots(11)$$

$x=a$  断面で  $v=w_0$  であるから, 式 (10), (11) から,

$$B = w_0 - \frac{\mu\rho}{2E} a^2 - \left(m - \frac{\mu\rho}{E} l\right) a \dots\dots\dots(12)$$

よって,  $l > x > a$  区間では次式が成立する。

$$\frac{dv}{dx} = m - \frac{\mu\rho}{E} (l-x) \dots\dots\dots(13a)$$

$$\sigma_f = -\mu\rho(l-x) \dots\dots\dots(13b)$$

$$v = w_0 + \frac{\mu\rho}{2E} (x^2 - a^2) + \left(m - \frac{\mu\rho}{E} l\right) (x-a) \dots\dots\dots(13c)$$

式 (13a) を用いて式 (7) を書換えて,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 &= \left[ m - \frac{\mu\rho}{E} (l-a) \right]^2 - \frac{4\mu\rho w_0}{\pi E} \\ &\quad + \frac{8\mu\rho w_0}{\pi E} \sin\frac{2\beta v}{2} \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

ここでつぎの記号を用いるものとする。

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\left\{ m - \frac{\mu\rho}{E} (l-a) \right\}^2 - \frac{4\mu\rho w_0}{\pi E}} \\ c^2 &= \frac{\frac{8\mu\rho w_0}{\pi E}}{r^2} \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

式 (14) はつぎのようになる。

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = r^2 \left\{ 1 + c^2 \sin^2\left(\frac{\beta v}{2}\right) \right\} \dots\dots\dots(16)$$

$(dv/dx)$  は  $x$  についての増加関数であるから,

$$\frac{dv}{dx} = r \sqrt{1 + c^2 \sin^2\left(\frac{\beta v}{2}\right)} \dots\dots\dots(17)$$

ここで,  $\psi = \frac{\beta v}{2}$  とおいて,  $d\psi/dx = \frac{\beta}{2} dv/dx$  であるから, 式 (17) はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{2}{\beta} \frac{d\psi}{dx} &= r \sqrt{1 + c^2 \sin^2\psi} \\ \frac{d\psi}{r \sqrt{1 + c^2 \sin^2\psi}} &= \frac{\beta}{2} dx = \frac{\pi}{4w_0} dx \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

$x=0$  で  $v=0$  すなわち,  $\psi=0$  となるから, 式 (18) を積分して,

$$\begin{aligned} r \left(\frac{\pi}{4w_0}\right) x &= \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 + c^2 \sin^2\psi}} \\ &= \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 + c^2(1 - \cos^2\psi)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + c^2}} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{c^2}{1 + c^2}\right) \sin^2\psi}} \end{aligned}$$

さらに、 $\psi = \frac{\pi}{2} - \theta$  とおくと、 $d\psi = -d\theta$ 、 $\cos \psi = \sin \theta$  であるから、上式はつぎのようになる。

$$r \left( \frac{\pi}{4w_0} \right) x = \frac{-1}{\sqrt{1+c^2}} \int_{\frac{\pi}{2}-\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2 \sin^2 \theta}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \left[ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2 \sin^2 \theta}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}-\psi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-\left(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\right)^2 \sin^2 \theta}} \right]$$

Legendre の第一種積分を次式で表わす。

$$F(k, \psi) = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}$$

この積分値の数表は用意されている<sup>9)</sup>。したがって、数値計算は容易である。

よって上式は  $F(k, \psi)$  を用いてつぎのように書ける。

$$\frac{\pi r}{4w_0} x = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \left[ F\left(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \frac{v}{w_0}\right) \right]$$

式 (15) を用いて、

$$\frac{\pi r}{4w_0} = \frac{\pi}{4w_0} \cdot \frac{\sqrt{\frac{8\mu\rho w_0}{\pi E}}}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\pi\mu\rho}{2Ew_0}}$$

であるから、式 (18) の解は次式で与えられる。

$$x \sqrt{\frac{\pi\mu\rho}{2Ew_0}} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \left[ F\left(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \frac{v}{w_0}\right) \right] \dots\dots\dots(19)$$

式 (19) は移動量  $v$  と  $x$  との関係を与えるものである。

$a$  の値を求めるには、式 (19) で  $v=w_0$ 、 $x=a$  とおいて、

$$a \sqrt{\frac{\pi\mu\rho}{2Ew_0}} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \left[ F\left(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \frac{\pi}{4}\right) \right] \dots\dots\dots(20)$$

$$\text{ここに、} c^2 = \frac{8\mu\rho w_0 / \pi E}{\left\{ m - \frac{\mu\rho}{E} (l-a) \right\}^2 - \left( \frac{4\mu\rho w_0}{\pi E} \right)}$$

$c$  の値は  $m$  および  $a$  の関数であるから、与えられた無拘束ひずみ  $m$  に対する  $a$  を求めるには、式 (20) で  $a$  を仮定して式 (20) の右辺を計算し、これから  $a$  を定め、これを第 2 近似値として、以下同様な計算をくり返せばよいことになる。 $a$  の値が定まれば、式 (19) で、与えられた移動量  $v (< w_0)$  に対する  $x$  が求められ、 $v$  の分布が定められる。

拘束応力を求めるには、式 (17)、式 (2) を用いて、

$$\frac{\sigma_f}{E} + m = r \sqrt{1+c^2 \sin^2 \left( \frac{\beta v}{2} \right)}$$

$$= \sqrt{r^2 + \frac{8\mu\rho w_0}{\pi E} \sin^2 \left( \frac{\beta v}{2} \right)}$$

$$= \sqrt{\left\{ m - \frac{\mu\rho}{E} (l-a) \right\}^2 - \frac{4\mu\rho w_0}{\pi E} + \frac{8\mu\rho w_0}{\pi E} \sin^2 \left( \frac{\beta v}{2} \right)}$$

$$= \sqrt{\left\{ m - \frac{\mu\rho}{E} (l-a) \right\}^2 - \frac{4\mu\rho w_0}{\pi E} \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} \frac{v}{w_0} \right)}$$

$$\sigma_f = -mE + \sqrt{\left\{ mE - \mu\rho(l-a) \right\}^2 - \frac{4\mu\rho E w_0}{\pi} \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} \frac{v}{w_0} \right)} \dots\dots\dots(21)$$

式 (21) は移動量  $v$  と拘束応力  $\sigma_f$  との関係を与える。式 (19) で  $v$  と  $x$  との関係が与えられているから、 $0 < x < a$  区間における  $\sigma_f$ 、 $v$  の分布は定められる。

$l > x > a$  区間の  $\sigma_f$ 、 $v$  は式 (13) で定められる。

以上の解では 図-3 に示したように、 $x=a$  において  $v=w_0$  であるとし、 $l > x > a$  区間では  $v > w_0$  と仮定した。

これは与えられた舗装版長  $2l$  に対して、無拘束ひずみ  $m$  がある値以上となる場合であって、 $m$  がこの値  $m_{cr}$  以下であれば、舗装版自由端での移動量  $v$  は  $w_0$  より小さいこととなる。

よって、自由端における移動量が  $w_0$  と等しくなるときの舗装版長を  $2l_{cr}$ 、無拘束ひずみを  $m_{cr}$  と仮定する。この両者の関係を定めるには、自由端で  $\sigma_f=0$ 、 $v=w_0$  であることを式 (7) に代入して、

$$(dv/dx)^2_{a=l_{cr}} = m_{cr}^2$$

として、式 (7) を解けばよい。あるいは式 (20) で  $a=l_{cr}$  とおいても同じ結果を与える。

$$l_{cr} \sqrt{\frac{\pi\mu\rho}{2Ew_0}} = \frac{c_{cr}}{\sqrt{1+c_{cr}^2}} \left[ F\left(\frac{c_{cr}}{\sqrt{1+c_{cr}^2}}, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{c_{cr}}{\sqrt{1+c_{cr}^2}}, \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

$$\text{ここに、} c_{cr}^2 = \frac{\left( \frac{8\mu\rho w_0}{\pi E} \right)}{m_{cr}^2 - \left( \frac{4\mu\rho w_0}{\pi E} \right)} \dots\dots\dots(22)$$

式 (22) で  $l_{cr}$  と  $m_{cr}$  との関係が求められる。

$m > m_{cr}$  の場合自由端移動量  $v_l$  は  $w_0$  より大となり、 $v$  が  $w_0$  に等しくなる断面は式 (20) で定められる。 $v$ 、 $\sigma_f$  の分布はすでに述べた方法で定められる。

$m < m_{cr}$  の場合には  $v_l < w_0$  となる。この場合の解は式 (6) において、自由端  $x=l$  で移動量は  $v_l$  であり、拘束応力  $\sigma_f=0$  であることを考慮して、積分定数はつぎのようになる。

$$K = m^2 + \frac{2\mu\rho}{E\beta} \cos\beta v_e$$

よって,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 &= m^2 + \frac{2\mu\rho}{E\beta} \cos\beta v_l - \frac{2\mu\rho}{E\beta} \cos\beta v \\ &= m^2 + \frac{2\mu\rho}{E\beta} \cos\beta v_l - \frac{2\mu\rho}{E\beta} \left(1 - 2\sin^2\frac{\beta v}{2}\right) \\ &= \left\{m^2 - \frac{2\mu\rho}{E\beta} (1 - \cos\beta v_l)\right\} + \frac{4\mu\rho}{E\beta} \sin^2\frac{\beta v}{2} \end{aligned} \quad \dots\dots(23)$$

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \sqrt{m^2 - \frac{4\mu\rho w_0}{\pi E} \left(1 - \cos\frac{\pi v_l}{2 w_0}\right)} \\ c_1^2 &= \frac{(8\mu\rho w_0/\pi E)}{r_1^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(24)$$

とおくと, 式 (23) はつぎのようになる。

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = r_1 \left\{1 + c_1^2 \sin^2\left(\frac{\beta v}{2}\right)\right\} \quad \dots\dots(25)$$

式 (25) は式 (16) と同形式であるから, 解は式 (19) と同形式で与えられる。

$$\begin{aligned} x\sqrt{\frac{\pi\mu\rho}{2Ew_0}} &= \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} \left[ F\left(\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}, \frac{\pi}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - F\left(\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi v}{4 w_0}\right) \right] \end{aligned} \quad \dots\dots(26)$$

自由端移動量  $v_l$  を定めるには式 (26) で  $x=l, v=v_l$  とおいて,

$$\begin{aligned} l\sqrt{\frac{\pi\mu\rho}{2Ew_0}} &= \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} \left[ F\left(\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}, \frac{\pi}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. - F\left(\frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi v_l}{4 w_0}\right) \right] \dots\dots(27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここに, } c_1^2 &= \frac{(8\mu\rho w_0/\pi E)}{m^2 - \left(\frac{4\mu\rho w_0}{\pi E}\right) \left(1 - \cos\frac{\pi v_l}{2 w_0}\right)} \\ &= \frac{(8\mu\rho w_0/\pi E)}{m^2 - \frac{8\mu\rho w_0}{\pi E} \sin^2\frac{\pi v_l}{4 w_0}} \end{aligned}$$

式 (27) の未知数は  $v_l$  のみであるから, 試験的に解を求めることが可能である。

式 (23), 式 (2) を用いて,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= \frac{\sigma_f}{E} + m \\ &= \sqrt{m^2 - \frac{2\mu\rho}{E\beta} (1 - \cos\beta v_l) + \frac{4\mu\rho}{E\beta} \sin^2\frac{\beta v}{2}} \\ \sigma_f &= -mE \\ &\quad + \sqrt{(mE)^2 - \frac{8\mu\rho E w_0}{\pi} \left(\sin^2\frac{\pi v_l}{4 w_0} - \sin^2\frac{\pi v}{4 w_0}\right)} \end{aligned} \quad \dots\dots(28)$$

$v$  と  $x$  との関係は式 (26) で,  $\sigma_f$  と  $v$  との関係は式 (28) で与えられるから,  $v, \sigma_f$  の分布は求められる。

式 (22) で  $l_{cr}$  と  $m_{cr}$  との関係を定めるにあたって,

$c_{cr}$  の分母が 0 となる場合, すなわち無拘束ひずみが,

$$m_{cr} = 2\sqrt{\frac{\mu\rho w_0}{\pi E}} \quad \dots\dots(29)$$

で与えられるとき,  $c_{cr} \rightarrow \infty$  となる。この場合

$$\lim_{c_{cr} \rightarrow \infty} \frac{c_{cr}}{\sqrt{1+c_{cr}^2}} = \lim_{c_{cr} \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{c_{cr}}\right)^2}} = 1$$

であるから, 式 (22) の  $l_{cr}$  はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} l_{cr} &= \sqrt{\frac{2Ew_0}{\pi\mu\rho}} \left[ F\left(1, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(1, \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ &= \sqrt{\frac{2Ew_0}{\pi\mu\rho}} [\infty - 0.8814] \\ &= \infty \end{aligned}$$

すなわち, 自由端移動量が  $w_0$  となるには無拘束ひずみが  $2\sqrt{\mu\rho w_0/\pi E}$  のとき, 舗装版長は無有限長である必要がある。あるいは半無限長の舗装版であることが必要である。

半無限長舗装版の場合でも, 無拘束  $v$  ひずみが,

$$2\sqrt{\frac{\mu\rho w_0}{\pi E}}$$

より小さい場合には自由端移動量は  $w_0$  より小さいものである。

### 3. 本理論適用範囲

有限長舗装版に関する理論において, 式 (7) は移動量  $v (< w_0)$  に関せず常に成立するものとした。すなわち,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 &= \left\{ \left(\frac{dv}{dx}\right)_a^2 - \frac{4\mu\rho w_0}{E\pi} \right\} \\ &\quad + \frac{8\mu\rho w_0}{E\pi} \sin^2\left(\frac{\pi v}{4 w_0}\right) \end{aligned} \quad \dots\dots(7)$$

式 (7) が成立するのは式 (7) の右辺が  $v$  に関せず正でなければならない。

すなわち,

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_a \geq 2\sqrt{\frac{\mu\rho w_0}{E\pi}} \quad \dots\dots(30)$$

式 (30) が成立しないときには,  $(dv/dx)$  は虚数となって, 実際の状態を示さないことになるので, 2 で述べた理論は成立しないことになる。

式 (7) で  $x=0$  断面で  $v=0$  であるから,

$$\left(\frac{dv}{dx}\right)_0^2 = \left(\frac{dv}{dx}\right)_a^2 - \frac{4\mu\rho w_0}{E\pi}$$

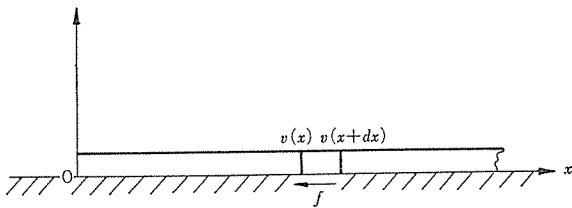
式 (30) の等式の条件を用いると,  $(dv/dx)_0 = 0$  となる。すなわち, 舗装版中央は完全に拘束された状態にある。すなわち,  $v=0, dv/dx=0$  である。

このような状態のおこる場合は無限長の版の場合のみ可能である。

本理論はこのような完全拘束状態のおこる場合については適用できないこととなる。

半無限長舗装版の場合にはこのような完全拘束状態が

図-4 半無限長舗装版



おこりうるものであって、例えば Peltier<sup>4)</sup> はつぎの解を与えている。x軸の原点は半無限舗装版の自由端にとつてある(図-4)。

(1)  $m < 2\sqrt{\mu\rho w_0/E\pi}$  の場合

自由端移動量は  $w_0$  より小さい。自由端移動量を  $v_0$  とする。

$$t_g\left(\frac{\pi}{8} \frac{v}{w_0}\right) = t_g\left(\frac{\pi}{8} \frac{v_0}{w_0}\right) e^{-x\sqrt{\frac{\mu\rho\pi}{2Ew_0}}} \dots\dots(31a)$$

$$\sigma_f = -mE + 2\sqrt{\frac{2\mu\rho E w_0}{\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{4} \frac{v}{w_0}\right) \dots\dots(31b)$$

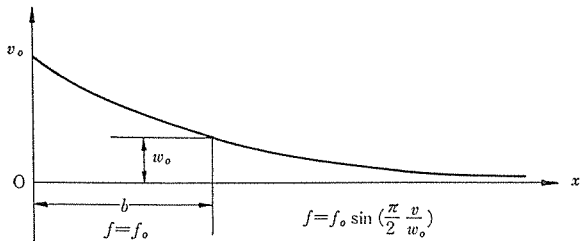
$$m = 2\sqrt{\frac{2\mu\rho w_0}{\pi E}} \sin\left(\frac{\pi}{4} \frac{v_0}{w_0}\right) \dots\dots(31c)$$

式(31c)で与えられた無拘束ひずみ  $m$  と自由端移動量  $v_0$  との関係が求められ、式(31a)で  $x$  と  $v$  との関係が、式(31b)で  $\sigma_f$ 、 $v$  の関係が求められ、 $v$ 、 $\sigma_f$  の分布が求まる。

(2)  $m < 2\sqrt{\mu\rho w_0/E\pi}$  の場合

この場合自由端移動量  $v_0$  は  $w_0$  より大となる。自由端から  $x=b$  断面で  $v=w_0$  となるものとする(図-5)。

図-5 半無限舗装版の移動量分布



$$b = \frac{E}{\mu\rho} \left( m - 2\sqrt{\frac{\mu\rho w_0}{E\pi}} \right) \dots\dots(32a)$$

$b > x > 0$  区間

$$\left. \begin{aligned} v &= w_0 - \frac{\mu\rho}{2E} (b^2 - x^2) + m(b-x) \\ \sigma_f &= -\mu\rho x \end{aligned} \right\} \dots\dots(32b)$$

$\infty > x > b$  区間

$$\left. \begin{aligned} t_g\left(\frac{\pi}{8} \frac{v}{w_0}\right) &= t_g\left(\frac{\pi}{8}\right) e^{-(x-b)\sqrt{\frac{\mu\rho\pi}{2Ew_0}}} \\ \sigma_f &= -mE + 2\sqrt{\frac{2\mu\rho w_0 E}{\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{4} \frac{v}{w_0}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(32c)$$

式(32a)で与えられた  $m$  に対応する  $b$  が求められ、式(32b)、(32c)で  $v$ 、 $\sigma_f$  の分布が求められる。

4. 計算例

以下の計算ではつぎの数値を用いるものとする。

コンクリート舗装単位容積重量

$$\rho = 2.5 \text{ t/m}^3 = 0.0025 \text{ kg/cm}^3$$

摩擦係数  $\mu = 1.0$

限界移動量  $w_0 = 0.5 \text{ cm}$

コンクリート センゲ係数  $E = 35 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$

$l_{cr}$  と  $m_{cr}$  との関係は式(22)で求めると図-6のようである。 $m_{cr} = 0.674 \times 10^{-4}$  に対して  $l_{cr} = \infty$  となる。

図-6  $m_{cr}$  と  $l_{cr}$  との関係

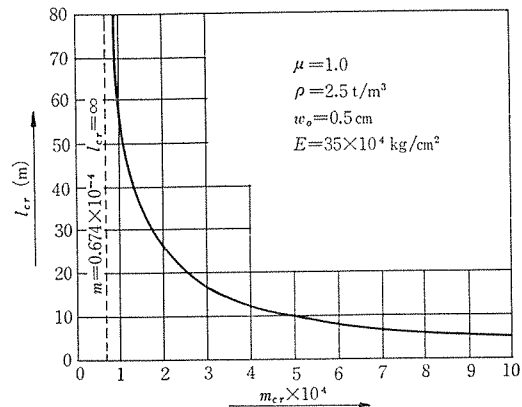


図-6の曲線の上側区間では自由端移動量は  $w_0 = 0.5 \text{ cm}$  より大となる場合の解が成立し、曲線より下側区間では自由端移動量は  $w_0 = 0.5 \text{ cm}$  より小なる場合の解が成立することとなる。

舗装版全長を  $2l = 200 \text{ m}$  とし、プレストレス  $50 \text{ kg/cm}^2$  を与えるときの、移動量およびプレストレスの分布を求める。 $50 \text{ kg/cm}^2$  のプレストレスは例えばプレテンション方式のようなもので与えられ、無拘束プレストレスが、 $50 \text{ kg/cm}^2$  になるものとする。

プレストレスの無拘束ひずみは、

$$m = 50/35 \times 10^4 = 1.43 \times 10^{-4}$$

よって、図-6から、これに対する  $l_{cr}$  を求めると約  $36 \text{ m}$  である。 $l > l_{cr}$  であるから、 $x=a$  断面で  $v = 0.5 \text{ cm}$  となる。

よって式(20)を用いて  $a$  を定める。

$$\frac{8\mu\rho w_0}{E\pi} = \frac{8 \times 1.0 \times 0.0025 \times 0.5}{35 \times 10^4 \times 3.1416} = 0.900 \times 10^{-8}$$

$$\frac{4\mu\rho w_0}{E\pi} = 0.4545 \times 10^{-8}$$

$$\frac{\mu\rho}{E} = \frac{1.0 \times 0.0025}{35 \times 10^4} = 0.714 \times 10^{-8}$$

$$\sqrt{\frac{\pi\mu\rho}{2Ew_0}} = \sqrt{\frac{3.1416 \times 1.0 \times 0.0025}{2 \times 35 \times 10^4 \times 0.5}} = 1.498 \times 10^{-4}$$

$$c^2 = \frac{0.909 \times 10^{-8}}{\{1.43 \times 10^{-4} - 0.714 \times 10^{-8}\}}$$

$$= \frac{0.909 \times 10^{-8}}{\{(1.0 \times 10^4 - a)\}^2 - 0.4545 \times 10^{-8}}$$

式 (20) の右辺をつぎのように書く。

$$\bar{a} = \sqrt{\frac{2Ew_0}{\pi\mu\rho}} \sin \alpha \left[ F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - F\left(\alpha, \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

ここに、 $\sin \alpha = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$

$a$  を仮定して  $\bar{a}$  を求めると 表-1 のようになる。

表-1

$a$ (m)	$\bar{a}$ (m)
52	53.5
53	53.2
54	52.7

よって  $a=53.14$  m が求める解となる。

53.14 m >  $x$  > 0 m 区間

式 (19) で  $v$  と  $x$  との関係を求める。

$$c^2 = 1.225, \sin \alpha = 0.7415, \alpha = 47.85^\circ$$

$$F\left(47.85^\circ, \frac{\pi}{2}\right) = 1.9005$$

式 (19) で  $v$  を仮定して  $x$  を定めるのが便利である。

式 (21) で  $\sigma_f$  を定めるにはつぎの式を用いる。

$$\sigma_f + mE = \sqrt{38.29^2 - 557 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} \frac{v}{0.5}\right)}$$

計算結果は 表-2 のようになる。

表-2

$v$ (cm)	$\frac{\pi - \frac{\pi}{4} \frac{v}{w_0}}{= \varphi^\circ}$	$F(\alpha, \varphi)$	$F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) - F(\alpha, \varphi)$	$\frac{x}{\times 10^4}$ cm	$\sigma_f + mE$ (kg/cm <sup>2</sup> )
0	90	1.9005	0	0	30.1
0.1	81	1.6669	0.2336	0.116	30.6
0.2	72	1.4399	0.4606	0.228	31.9
0.3	63	1.2240	0.6765	0.335	33.7
0.4	54	1.0211	0.8794	0.436	36.0

100 m >  $x$  > 53.14 m 区間

式 (13) を用いる。

$$\sigma_f + mE = 50 - 0.0025 \times (1.0 \times 10^4 - x)$$

$$v = 0.50 + \frac{1.0 \times 0.0025}{2 \times 35 \times 10^4} (x^2 - 0.3514^2 \times 10^8)$$

$$+ \left(1.43 \times 10^{-4} - \frac{1.0 \times 0.0025}{35 \times 10^4} \times 1.0 \times 10^4\right) \times (x - 0.3514 \times 10^4)$$

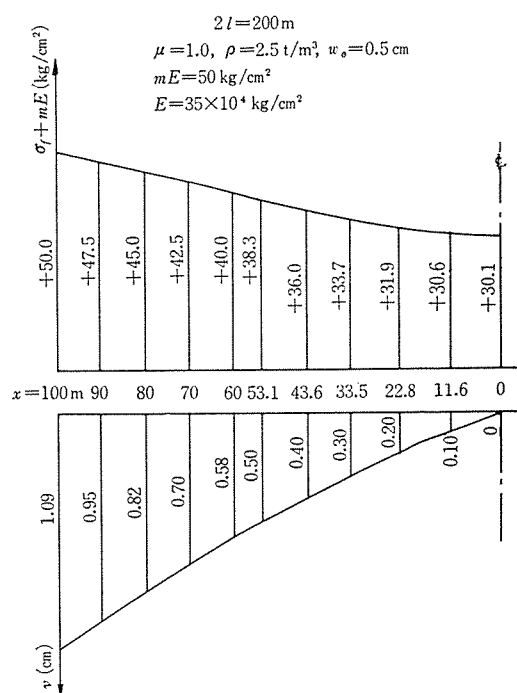
以上の計算結果を図示すると 図-7 のようになり、 $x=53.14$  m より小さい区間での摩擦によるプレストレスは、 $f=f_0$  とする場合よりも大きいものとなる。もし摩擦抵抗力が移動に関せず  $f_0$  であるとすれば、 $x=0$  断面のプレストレスはつぎのようになる。

$$50 - 0.0025 \times 1.0 \times 10^4 = 25 \text{ kg/cm}^2$$

よって摩擦抵抗力が移動量の関数であるとすれば、有利な結果がえられることになる。

以上ではコンクリートのヤング係数は  $35 \times 10^4$  kg/cm<sup>2</sup>

図-7 プレストレスを与えた直後のプレストレスの分布と移動量分布



と仮定したが、コンクリートのクリープの影響を考慮するにあたっては、簡単のためコンクリートの見掛け上のヤング係数を用い、 $E/(1+\varphi_\infty)$  として 2 の各式に適用すればよい。

上記プレストレスの場合で、プレストレスには変化はなく、50 kg/cm<sup>2</sup> のままであるが、コンクリートのヤング係数を  $15 \times 10^4$  kg/cm<sup>2</sup> とした場合の解を求める。プレストレッシングによる無拘束ひずみは、クリープをも考慮して、 $E=15 \times 10^4$  kg/cm<sup>2</sup> を用い、つぎのようになる。

$$m = 50/15 \times 10^4 = 3.333 \times 10^{-4}$$

また各種係数はつぎのようになる。

$$8 \mu \rho w_0 / E \pi = 2.14 \times 10^{-8}$$

$$4 \mu \rho w_0 / E \pi = 1.07 \times 10^{-8}$$

$$\sqrt{\pi \mu \rho / 2 E w_0} = 2.288 \times 10^{-4}$$

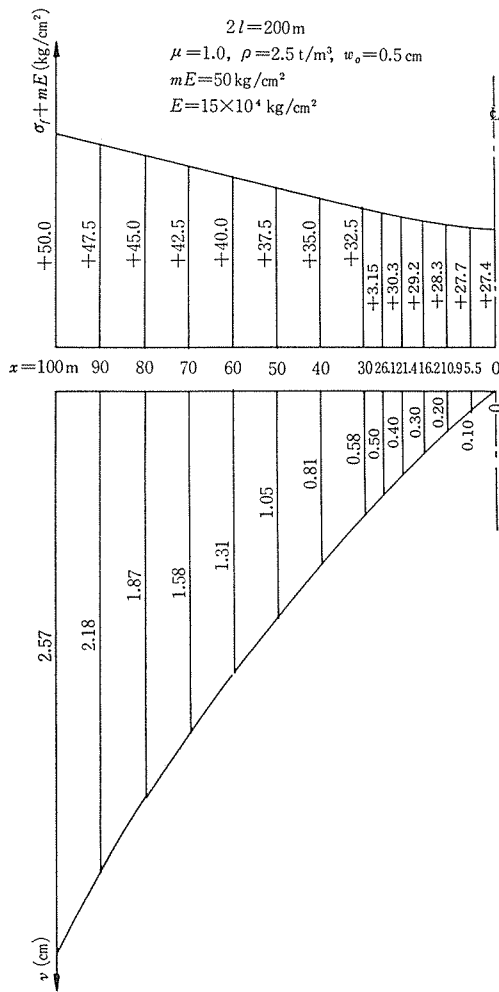
以上を用いて、式 (20) を解くと、 $a = 0.261 \times 10^4$  cm となる。よって  $c^2 = 0.639$ ,  $\alpha = 38.66^\circ$ ,  $F\left(\alpha, \frac{\pi}{2}\right) = 1.7719$  となる。

以上の結果を用いて、 $v, \sigma_f + mE$  の分布を定めると、図-8 のようになる。

すなわち 図-7 に比較すると、 $x=0$  断面のプレストレスは減少し、27.4 kg/cm<sup>2</sup> となり、摩擦抵抗力  $f$  が移動量に無関係と仮定する場合の値 25 kg/cm<sup>2</sup> に近いものとなる。

同様に年変化の温度変化のようなコンクリートのクリープに関係する長期変化に対しても、 $x=0$  断面の応力度は  $f=f_0$  とおいた場合の結果に近いものとなる。日

図-8 コンクリートのクリープを考慮したときのプレストレスと移動量の分布



変化の温度昇降に対してはクリープの影響は無視可能であって、応力分布は  $f=f_0$  と仮定した場合と異なるものとなる。

### 5. 結 び

本論文では路盤と舗装版との間の摩擦抵抗が、式(4)で与えられるように、摩擦抵抗が移動量に関する範囲と、無関係となる範囲とに分けられるとし、有限長舗装版についての解を求め、摩擦抵抗が移動量に無関係に一定であるとする場合より有利であることを示した。しかしコンクリートのクリープの影響を考えると移動量は大きく、ために摩擦抵抗力は移動量に無関係に一定であると仮定した場合に近い結果となることを明らかとした。

#### 参 考 文 献

- 1) Weil: "Der Verschiebewiderstand von Betonfahrba-nnplatten" Betonstraßen Jahrbuch (1960)
- 2) Friberg: "Restrained Temperature Movement in long Slabs" ACI Journal April (1968)
- 3) Friberg: "Frictional Resistance under Concrete Pavement and Restrained Stresses in Long Reinforced Slabs" Proceedings V 33 Highway Research Board (1954)
- 4) Peltier: "Contribution à l'étude des routes en béton précontraint" Revue Générale des Routes et des Aérodrômes 28 (1958)
- 5) Koepcke: "Berechnung von Beton-fahrbahnen" Bauingenieur 36 (1961)
- 6) Jaknke, Emde: "Funktionentafeln mit Formeln und Kurven"  $k$  の代りに  $\sin \alpha=k$  なるパラメータ  $\alpha$  を用いている。

1968. 11. 18・受付

### 御 寄 稿 の お 願 い

この雑誌は、プレストレスコンクリートのわが国でただ一つの総合技術雑誌です。会員諸兄の技術向上にいささかでも役立つように日夜苦心して編集に当たっておりますが、多くの問題を広くとりあげるにはこれでなかなか大変なことです。一方的になっても困りますし、とにかく皆様の卒直な声をお聞かせ願えませんでしょうか。自由に気楽に意見を述べて頂く会員欄、疑問点を相談していただきたい質疑応答欄、工事の状況、施工の苦心点を、現場から速報してほしい工事ニュース欄、口絵写真欄、その他報告、資料など、お気軽にどしどし原稿をお寄せ下さい。また、新設してほしい欄とか、もっと充実してほしい欄、雑誌に対する建設的な御意見なども募ります。少しでも多く皆様の声を反映した親しみやすい雑誌に育て上げたいと念じておりますので御協力願います。以上の原稿、御意見などはすべて下記へお送り下さい。

東京都中央区銀座2の12の4 銀鹿ビル3階 PC技術協会編集委員会 電話(541)3595