報　告

水平力を受ける杭の挙動

——軸方向力を考慮に入れた場合——

槇　田　博　臣*

1. 緒　言

従来杭頭に水平力を受ける杭の挙動は，弾性支承上に置かれた半無限長のはりとして取扱った Chang の式によって示されてきたが，この場合，杭に作用する軸方向力（杭荷重）の影響を無視している。

ここでは，軸方向力を考慮に入れるとともに，半無限長と有限長の両場合について，杭頭に水平力を受ける杭の挙動を明らかにした。

いずれの場合も周辺摩擦のない完全な先端支持抗として取扱ったが，これは周辺摩擦を考慮に入れると解析的解法が困難となり，また周辺摩擦を無視することによって杭の選択は常に安全側にあるからである。

杭頭における拘束条件として，回転固定と回転自由の両場合があり，さらに有限長杭の場合には杭先端の拘束条件としてヒンジの場合と，変位自由の場合とがある。

2. 基本式の誘導

図—1 において，

N：杭頭に働らく軸方向力　kg

S：杭先端に働らく先端支持力　kg

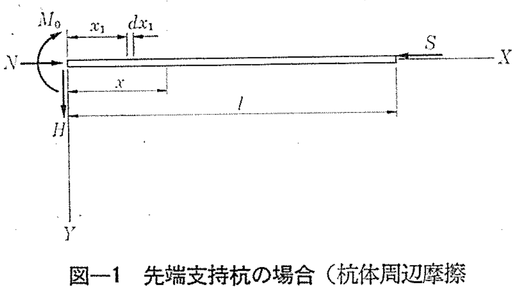
　完全支持杭の場合　　$S=N$

　完全摩擦杭の場合　　$S=0$

H：杭頭に働らく水平力（横方向力）　kg

M_0：杭頭に働らく曲げモーメント　kg-cm

　（杭頭回転固定の場合は固定モーメント，杭頭回転自由の場合はゼロ）



図—1　先端支持杭の場合（杭体周辺摩擦のない場合）

* 東急コンクリート工業（株）専務取締役

l：杭の全長

　また

E：杭の材料のヤング係数　kg/cm²

I：杭断面の断面２次モーメント　cm⁴

d_0：杭の外径　cm

K：地盤係数　kg/cm³

$k=Kd_0$：地盤のばね定数　kg/cm²

とすれば，杭の任意点における曲げモーメントは

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-N(y-y_{x=0})+Hx-\int_0^x ky_1(x-x_1)-M_0$$
$$=-N(y-y_{x=0})+Hx-kx\int_0^x ydx+k\int_0^x yxdx-M_0 \cdots\cdots(1)$$

式(1) を x で遂次微分することにより，

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=-N\frac{dy}{dx}+H-k\left\{\int_0^x ydx+xy\right\}+kyx$$
$$=-N\frac{dy}{dx}+H-k\int_0^x ydx$$

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=-N\frac{d^2y}{dx^2}-ky \cdots\cdots(2)$$

いま

$$\left.\begin{array}{l}p^2=N/EI\\ 4\beta^4=k/EI\end{array}\right\} \cdots\cdots(3)$$

とおくと，式(2) は，

$$\frac{d^4y}{dx^4}+p^2\frac{d^2y}{dx^2}+4\beta^4y=0 \cdots\cdots(4)$$

式(4) の一般解は，

$$y=\sum Ce^{\lambda x} \cdots\cdots(5)$$

の形で与えられ，また λ は次式の根として与えられる。

$$\lambda^4+p^2\lambda^2+4\beta^4=0 \cdots\cdots(6)$$

式(6) の根は

$$\lambda=\pm\sqrt{-\frac{p^2}{2}\pm i\sqrt{4\beta^4-\frac{p^4}{4}}} \cdots\cdots(7)$$

いま，σ および τ を実数として

$$\lambda=\sigma+i\tau \cdots\cdots(8)$$

とおき，式(5) と式(7) とを等置することにより，

$$\left.\begin{aligned}\sigma&=\pm\sqrt{\beta^2-\frac{p^2}{4}}\\ \tau&=\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$\therefore\quad \lambda=\pm\left\{\pm\sqrt{\beta^2-\frac{p^2}{4}}+i\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}\right\}$$

$$\therefore\quad \lambda_1=\sqrt{\beta^2-\frac{p^2}{4}}+i\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}$$

$$\lambda_2=\sqrt{\beta^2-\frac{p^2}{4}}-i\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}$$

$$\lambda_3=-\left(\sqrt{\beta^2-\frac{p^2}{4}}-i\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}\right)$$

$$\lambda_4=-\left(\sqrt{\beta^2-\frac{p^2}{4}}+i\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}\right)$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad y=&e^{\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot x}\left(C_1\sin\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x+C_2\cos\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x\right)\\&+e^{-\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot x}\left(C_3\sin\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x+C_4\cos\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(10)\end{aligned}$$

いま簡単のために

$$\left.\begin{aligned}a&=\sqrt{\beta^2-p^2/4}\\ b&=\sqrt{\beta^2+p^2/4}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

とおくと，式 (10) は

$$\begin{aligned}y=&e^{ax}(C_1\sin bx+C_2\cos bx)\\&+e^{-ax}(C_3\sin bx+C_4\cos bx)\cdots\cdots\cdots(12)\end{aligned}$$

積分定数 C_1, C_2, C_3 および C_4 は杭両端の拘束条件によって定まる。

式 (12) を x によって逐次微分すると

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}=&e^{ax}\{\sin bx\cdot(aC_1-bC_2)+\cos bx\cdot(aC_2+bC_1)\}\\&+e^{-ax}\{-\sin bx\cdot(aC_3+bC_4)\\&+\cos bx\cdot(-aC_4-bC_3)\}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}=&e^{ax}[\sin bx\{C_1(a^2-b^2)-2abC_2\}\\&+\cos bx\{C_2(a^2-b^2)+2abC_1\}]\\&+e^{-ax}[\sin bx\{C_3(a^2-b^2)+2abC_4\}\\&+\cos bx\{C_4(a^2-b^2)-2abC_3\}]\cdots\cdots\cdots(14)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3y}{dx^3}=&e^{ax}[\sin bx\{a(a^2-3b^2)C_1+b(b^2-3a^2)C_2\}\\&+\cos bx\{a(a^2-3b^2)C_2-b(b^2-3a^2)C_1\}]\\&+e^{-ax}[\sin bx\{-a(a^2-3b^2)C_3+b(b^2-3a^2)C_4\}\\&+\cos bx\{-a(a^2-3b^2)C_4-b(b^2-3a^2)C_3\}]\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)\end{aligned}$$

上記の式 (11)～(15) が基本式である。

3．半無限長杭の場合（$\beta l>\pi$ の場合）

一般に $\beta l>\pi$ の場合，杭は半無限長（$l=\infty$）として取扱うことができ，これは JIS ＰＣ杭の場合，$d_0=300$ mm に対し $l/d_0>23$, $d_0=1\,200$ mm に対し $l/d_0>16$ に相当する。

半無限長杭の場合には $x=\infty$ において $y=0$ とならなければならないから，4個の積分定数のうち $C_1=C_2=0$ となり，残余の C_3 および C_4 は杭頭の拘束条件によって定まる。したがって式 (12) より

$$y=e^{-ax}(C_3\sin bx+C_4\cos bx)\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

式 (13) より

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}=&e^{-\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot x}\left\{C_3\left(-\sqrt{\beta^2-\frac{p^2}{4}}\sin\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x+\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}\cos\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x\right)\right.\\&\left.+C_4\left(-\sqrt{\beta^2-\frac{p^2}{4}}\cos\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x-\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}\sin\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x\right)\right\}\cdots(17)\end{aligned}$$

式 (14) より

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}=&e^{-\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot x}\left[C_3\left\{-\frac{p^2}{2}\sin\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x-2\sqrt{\beta^4-\frac{p^4}{16}}\cos\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x\right\}\right.\\&\left.+C_4\left\{2\sqrt{\beta^4-\frac{p^4}{16}}\sin\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x-\frac{p^2}{2}\cos\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x\right\}\right]\cdots\cdots\cdots(18)\end{aligned}$$

式 (15) より

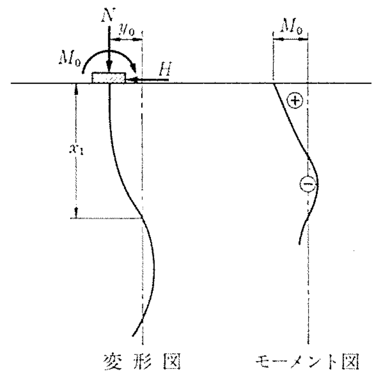
$$\begin{aligned}\frac{d^3y}{dx^3}=&e^{-\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot x}\left[C_3\left\{\sqrt{\beta^2-\frac{p^2}{4}}(p^2+2\beta^2)\sin\cdot\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x+\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}(2\beta^2-p^2)\cos\cdot\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x\right\}\right.\\&\left.+C_4\left\{\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}(p^2-2\beta^2)\sin\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x+\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}(p^2+2\beta^2)\cos\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}x\right\}\right]\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)\end{aligned}$$

(1)　杭頭回転固定の場合

この場合，杭頭（$x=0$）における拘束条件として

$$\frac{dy}{dx}=0\qquad ①$$

$$EI\frac{d_2y}{dx^2}=-M_0\qquad ②$$



図―2　杭頭回転固定の場合

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=H \qquad ③$$

条件①と式（17）とから

$$C_3\sqrt{\beta^2+\frac{p^2}{4}}-C_4\sqrt{\beta^2-\frac{p^2}{4}}=0 \quad \cdots\cdots\cdots(20)$$

条件②と式（18）とから

$$EI\left[-C_3\cdot 2\sqrt{\beta^4-\frac{p^4}{16}}-C_4\frac{p^2}{2}\right]=-M_0 \cdots(21)$$

条件③と式（19）とから

$$EI[C_3\sqrt{\beta^2+p^2/4}\,(2\beta^2-p^2)$$
$$+C_4\sqrt{\beta^2-p^2/4}\,(2\beta^2+p^2)]=H$$

あるいは

$$2\beta^2(C_3\sqrt{\beta^2+p^2/4}+C_4\sqrt{\beta^2-p^2/4})$$
$$-p^2(C_3\sqrt{\beta^2+p^2/4}-C_4\sqrt{\beta^2-p^2/4})=\frac{H}{EI}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

式（20）と式（22）とより

$$C_3\sqrt{\beta^2+p^2/4}+C_4\sqrt{\beta^2-p^2/4}=\frac{H}{EI}\cdot\frac{1}{2\beta^2}\cdots(23)$$

式（20）と式（23）とから

$$\left.\begin{aligned}C_3&=\frac{H}{EI}\cdot\frac{1}{4\beta^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta^2+p^2/4}}\\ C_4&=\frac{H}{EI}\cdot\frac{1}{4\beta_2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta^2-p^2/4}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(24)$$

式（18）と条件②および式（24）とから

$$M_0=\frac{H}{2}\Big/\sqrt{\beta^2-p^2/4} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

式（16）と式（24）とから，変位 y は

$$y=\frac{H}{EI}\,\frac{1}{4\beta}\,2\,e^{-\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot x}\left\{\frac{\sin\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot x}{\sqrt{\beta^2+p^2/4}}\right.$$
$$\left.+\frac{\cos\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot x}{\sqrt{\beta^2-p^2/4}}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

杭頭変位 $y_{x=0}(=y_0)$ は

$$y_{x=0}=\frac{H}{EI}\,\frac{1}{4\beta^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta^2-p^2/4}}\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

杭の傾斜角 dy/dx は式（17）と式（24）とから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{H}{2EI}e^{-\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot x}\frac{\sin\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot x}{\sqrt{\beta^4-p^4/16}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

杭に働らく曲げモーメント $-EI\cdot d^2y/dx^2$ は式（18）と式（24）とから

$$-EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{H}{2}e^{-\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot x}\left\{-\frac{\sin\sqrt{{}^2+p^2/4\cdot x}}{\sqrt{\beta^2+p^2/4}}\right.$$
$$\left.+\frac{\cos\sqrt{\beta^2+p^2/4\cdot x}}{\sqrt{\beta^2-p^2/4}}\right\}$$

杭頭（$x=0$）における固定モーメント M_0 は式（25）のとおりとなる。

杭に働らくせん断力は式（19）と式（24）とから

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{H}{2}\left\{\frac{p^2/2}{\sqrt{\beta^4-p^4/16}}\sin\sqrt{\beta^2+p^2/4\cdot x}\right.$$
$$\left.+2\cos\sqrt{\beta^2+p^2/4}\,x\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

杭頭（$x=0$）においては

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=H \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)'$$

不動点として $y=0$ となる位置は式（26）から

$$\frac{\sin\sqrt{\beta^2+p^2/4\cdot x}}{\sqrt{\beta^2+p^2/4}}+\frac{\cos\sqrt{\beta^2+p^2/4\cdot x}}{\sqrt{\beta^2-p^2/4}}=0$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+p^2/4}}\left(n\pi-\tan^{-1}\sqrt{\frac{\beta^2+p^2/4}{\beta^2-p^2/4}}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

第1不動点（$n=1$）x_1 は

$$x_1=\frac{1}{\sqrt{\beta^2+p^2/4}}\left(\pi-\tan^{-1}\sqrt{\frac{\beta^2+p^2/4}{\beta^2-p^2/4}}\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)'$$

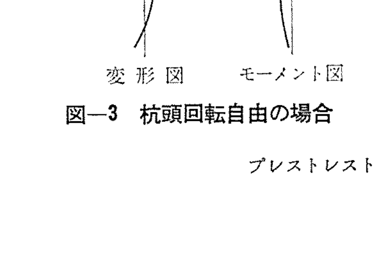
（2） 杭頭回転自由の場合

この場合の杭頭における拘束条件は

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=0 \qquad ①$$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=H \qquad ②$$

式（11）を代入することにより，条件①と式（18）とから



図―3　杭頭回転自由の場合

$$C_3\cdot 2\sqrt{\beta^4-p^4/16}+C_4\cdot p^2/2=0$$

条件②と式（19）とから

$$C_3\sqrt{\beta^2+p^2/4}\,(2\beta^2-p^2)+C_4\sqrt{\beta^2-p^2/4}\,(2\beta^2+p^2)=H/EI$$

上の両式から

$$\left.\begin{aligned}C_3&=-H/EI\cdot p^2/8\beta^4\sqrt{\beta^2+p^2/4}\\ C_4&=H/EI\cdot\sqrt{\beta^2-p^2/4}/2\beta^4\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(32)$$

式（32）と式（16）とから

$$y=H/EI4\beta^4\cdot e^{-\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot x}\{2\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot\cos\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot x-p^2/2\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot\sin\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot x\}\quad\cdots\cdots(33)$$

杭頭変位 $y_{x=0}$ は

$$y_{x=0}=H/EI\cdot\sqrt{\beta^2-p^2/4}/2\beta^4\quad\cdots\cdots(33)'$$

不動点として $y=0$ となる位置 x_1 は

$$2\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cos\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot x-p^2/2\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot\sin\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot x=0$$

$$\therefore\ x_1=1/\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot\{n\pi+\tan^{-1}(4/p^2\cdot\sqrt{\beta^4-p^4/16})\}\quad\cdots\cdots(34)$$

式（32）と式（17）とから

$$\frac{dy}{dx}=-H/EI\cdot e^{-\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot x}/2\beta^2\cdot\{\sqrt{\beta^2-p^2/4}/\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot\sin\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot x+\cos\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot x\}\quad\cdots\cdots(35)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=-H/2\beta^2EI\quad\cdots\cdots(35)'$$

式（32）と式（19）とから

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=He^{-\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot x}/\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot\sin\cdot\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot x\quad\cdots\cdots(36)$$

式（32）と式（19）とから

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=He^{-\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot x}\{\cos\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot x-\sqrt{\beta^2-p^2/4}/\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot\sin\sqrt{\beta^2+p^2/4}\,x\}\quad\cdots\cdots(37)$$

杭頭におけるせん断力は

$$EI\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}=H\quad\cdots\cdots(37)'$$

曲げモーメントの最大値は $d^3y/dx^3=0$ のとき生ずる。

式（37）より

$$\cos\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot x-\sqrt{\beta^2-p^2/4}/\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot\sin\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot x=0$$

$$\therefore\ \sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot x=n\pi+\tan^{-1}(\sqrt{\beta^2+p^2/4}/\sqrt{\beta^2-p^2/4})$$

式（36）より

$$\left.\begin{aligned}M_{\max}&=EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\max}\\ &=H/\sqrt{2}\,\beta\cdot\exp^{-1}\left\{\sqrt{\beta^2-p^2/4}/\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot\left(n\pi+\tan^{-1}\sqrt{\frac{\beta^2+p^2/4}{\beta^2-p^2/4}}\right)\right\}\\ &M_{\max}\text{ の生ずる位置 }x_2\text{ は}\\ x_2&=\left(n\pi+\tan^{-1}\sqrt{\frac{\beta^2+p^2/4}{\beta^2-p^2/4}}\right)\bigg/\sqrt{\beta^2+p^2/4}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(38)$$

（3）軸方向力考慮の有無が各種特性値に及ぼす影響

以下の比較において，軸方向力を考慮した場合には添字 N を付ける。$p=0$ とおけば軸方向力を無視した場合となる。

a）杭頭回転固定る場合

1）杭頭変位　式（27）より

$$y_{x=0,N}/y_{x=0}=\beta/\sqrt{\beta^2-p^2/4}>1\quad\cdots\cdots(39)$$

2）杭頭固定モーメント　式（29）′より

$$M_{0,N}/M_0=\beta/\sqrt{\beta^2-p^2/4}>1\quad\cdots\cdots(40)$$

3）杭頭におけるせん断力　式（30）′より

$$\left(EI\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0,N}\bigg/\left(EI\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}=1\quad\cdots\cdots(41)$$

4）$y=0$ となる第1不動点の位置　式（31）′より

$$x_{1,N}/x_1=\beta/\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot\left(\pi-\tan^{-1}\sqrt{\frac{\beta^2+p^2/4}{\beta^2-p^2/4}}\right)\bigg/(\pi-\pi/4)<1\quad\cdots\cdots(42)$$

b）杭頭回転自由の場合

1）杭頭変位　式（33）′より

$$y_{x=0,N}/y_{x=0}=\sqrt{\beta^2-p^2/4}/\beta<1\quad\cdots\cdots(39)'$$

2）杭頭における傾斜角　式（35）′より

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0,N}\bigg/\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=1\quad\cdots\cdots(43)$$

3）杭頭におけるせん断力　式（37）′より

$$\left(EI\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0,N}\bigg/\left(EI\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}=1\quad\cdots\cdots(41)'$$

4）$y=0$ となる第1不動点の位置　式（34）より

$$x_{1,N}/x_1=\beta/\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot\{\tan^{-1}4/p^2\cdot\sqrt{\beta^4-p^4/16}\}\cdot 2/\pi<1\quad\cdots\cdots(42)'$$

5）最大曲げモーメント　式（38）より

$$\left.\begin{aligned}M_{\max,N}/M_{\max}&=\exp^{-1}\left\{\sqrt{\frac{\beta^2-p^2/4}{\beta^2+p^2/4}}\cdot\left(n\pi+\tan^{-1}\sqrt{\frac{\beta^2+p^2/4}{\beta^2-p^2/4}}\right)-\pi\left(n+\frac{1}{4}\right)\right\}<1\\ x_{2,N}/x_2&=\tan^{-1}\sqrt{\frac{\beta^2+p^2/4}{\beta^2-p^2/4}}\bigg/\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot 4\beta/\pi>1\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(38)'$$

4. 有限長杭の場合（$\beta l<\pi$）

（1） 頭部回転固定，先端ヒンジの場合（Case 1）

a) 拘束条件

杭頭 $x=0$ において

$$\frac{dy}{dx}=0 \text{（回転固定）}, \quad EI\frac{d^3y}{dx^3}=H$$

杭先端 $x=l$ において

$$y=0 \text{（先端ヒンジ）}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=0 \text{（回転自由）}$$

b) 積分定数

式（12)～(15）に前項の拘束条件を代入すをと次のマトリックス式が得られる。

$$\begin{bmatrix} b & a & b & -a \\ -b(b^2-3a^2) & a(a^2-3b^2) & -b(b^2-3a^2) & -a(a^2-3b^2) \\ e^{al}\sin bl & e^{al}\cos bl & e^{-al}\sin bl & e^{-al}\cos bl \\ e^{al}\{(a^2-b^2)\sin bl & e^{al}\{-2ab\sin bl & e^{-al}\{(a^2-b^2)\sin bl & e^{-al}\{2ab\sin bl \\ \quad +2ab\cos bl\} & \quad +(a^2-b^2)\cos bl\} & \quad -2ab\cos bl\} & \quad +(a^2-b^2)\cos bl \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{H}{EI} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdots(44)$$

これより C_s は，$C=\Delta C/\Delta$ として

$$\left.\begin{aligned} &\Delta=-8a^2b^2(a^2+b^2)(\cosh 2al+\cos 2bl) \\ &\Delta C_1=-H/EI\cdot 2ab(ae^{-2al} \\ &\qquad -b\sin 2bl+a\cos 2bl) \\ &\Delta C_2=H/EI\cdot 2ab(be^{-2al} \\ &\qquad +a\sin 2bl+b\cos 2bl) \\ &\Delta C_3=-H/EI\cdot 2ab(ae^{2al} \\ &\qquad +a\cos 2bl+b\sin 2bl) \\ &\Delta C_4=H/EI\cdot 2ab(-be^{2al} \\ &\qquad -b\cos 2bl+a\sin 2bl) \end{aligned}\right\} \cdots(45)$$

c) 諸　式

式（45）を式（12)～(15）に代入すると

1） 変位 y

$$y=\frac{H}{EI}\cdot\frac{1}{2(a^2+b^2)}\cdot\frac{1}{\cosh 2al+\cos 2bl} \cdot\Big[\frac{1}{b}\{\sin bx\cosh a(2l-x) -\sin b(2l-x)\cosh ax\} +\frac{1}{a}\{\cos bx\sinh a(2l-x) -\cos b(2l-x)\sinh ax\}\Big] \cdots(46)$$

$$y_{x=0}=\frac{H}{EI}\cdot\left(\frac{1}{a}\sinh 2al-\frac{1}{b}\sin 2bl\right)\Big/ 2(a^2+b^2)(\cosh 2al+\cos 2bl) \cdots(47)$$

$y_{x=l}=0$（分子が 0 なる故，拘束条件を満足）

2） 傾斜角 $\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{H}{EI}\cdot\frac{1}{2ab}\cdot\frac{1}{\cosh 2al+\cos 2bl} \cdot[\sin bx\{\sinh ax-\sinh u(2l-x)\} -\cos bx\sinh ax\sin 2bl] \cdots(48)$$

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0}=0$（拘束条件を満足）

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l}=-\frac{H}{EI}\sinh al\sin bl/ab(\cosh 2al +\cos 2bl) \cdots(49)$$

3） 曲げモーメント $-EI\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$-EI\frac{d^2y}{dx^2}=H[b\{\sinh a(2l-x)\cos bx -\sinh ax\cos b(2l-x)\} -a\{\cosh a(2l-x)\sin bx -\cosh ax\sin b(2l-x)\}] /2ab(\cosh 2al+\cos 2bl) \cdots(50)$$

$$-EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}=M_0=\frac{H}{2ab} \cdot\frac{b\sinh 2al+a\sin 2bl}{\cosh 2al+\cos 2bl} \cdots(51)$$

$-EI\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l}=0$（分子が 0 となる故，拘束条件を満足）

4） せん断力 $EI\dfrac{d^3y}{dx^3}$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{H}{2ab}\cdot\frac{1}{\cosh 2al+\cos 2bl} \cdot[(a^2+b^2)\{\sinh ax\sin b(2l-x) +\sinh a(2l-x)\sin bx\} -2ab\{\cosh ax\cos b(2l-x) +\cosh a(2l-x)\cos bx\}] \cdots(52)$$

$EI\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}=H$（拘束条件を満足）

$$EI\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=l}=-\frac{H}{2ab} \cdot\frac{2[(a^2+b^2)\sinh al\sin bl-2ab\cosh al\cos bl]}{\cosh 2al+\cos 2bl} \cdots(53)$$

$\left|EI\left(\dfrac{d_3y}{dx^3}\right)_{x=l}\right|>0.1N$ の場合には，先端におい

て滑動の生ずる恐れがあり，この場合には 4(1) 節の適用外となる。

（2） 頭部固定，先端変位自由の場合（Case 2）

a) 拘束条件

杭頭 $x=0$ において

$\dfrac{dy}{dx}=0$（回転固定），$EI\dfrac{d^3y}{dx^3}=H$（せん断力）

杭先端 $x=l$ において

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$（回転自由）

$\dfrac{d^3y}{dx^3}=0$（変位自由）

b) 積分定数　式 (12)～(15) に前項の拘束条件を代入すると次のマトリックス式が得られる。

$$\begin{bmatrix} -b(b^2-3a^2) & a(a^2-3b^2) & -b(b^2-3a^2) & -a(a^2-3b^2) \\ b & a & b & -a \\ e^{2al}\{(a^2-b^2)\sin bl+2ab\cos bl\} & e^{2al}\{(a^2-b^2)\cos bl-2ab\sin bl\} & \{(a^2-b^2)\sin bl-2ab\cos bl\} & \{(a^2-b^2)\cos bl+2ab\sin bl\} \\ e^{2al}\{a(a^2-3b^2)\sin bl-b(b^2-3a^2)\cos bl\} & e^{2al}\{b(b^2-3a^2)\sin bl+a(a^2-3b^2)\cos bl\} & \{-a(a^2-3b^2)\sin bl-b(b^2-3a^2)\cos bl\} & \{b(b^2-3a^2)\sin bl-a(a^2-3b^2)\cos bl\} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H/EI \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(54)$$

これより C_s は，$C=\varDelta C/\varDelta$ として

$$\left.\begin{aligned}
\varDelta&=4ab(a^2+b^2)^3e^{2al}\{b\sinh 2al+a\sin 2bl\}\\
\varDelta C_1&=H/EI\cdot a(a^2+b^2)e^{2al}\\
&\quad\cdot[(a^2+b^2)(b\cos 2bl+a\sin 2bl)\\
&\quad+4b(b^2-a^2)-b(a^2+b^2)e^{-2al}]\\
\varDelta C_2&=H/EI\cdot(a^2+b^2)e^{2al}[b^2(a^2+b^2)e^{-2al}\\
&\quad-\{(a^4+b^4-6a^2b^2)\\
&\quad+a(a^2+b^2)(b\sin 2bl-a\cos 2bl)\}]\\
\varDelta C_3&=H/EI\cdot a(a^2+b^2)e^{2al}[(a^2+b^2)\\
&\quad\cdot(a\sin 2bl-b\cos 2bl)\\
&\quad-4b(b^2-a^2)+b(a^2+b^2)e^{2al}]\\
\varDelta C_4&=H/EI\cdot(a^2+b^2)e^{2al}[b^2(a^2+b^2)e^{2al}\\
&\quad+a(a^2+b^2)(b\sin 2bl+a\cos 2bl)\\
&\quad-(a^4+b^4-6a^2b^2)]
\end{aligned}\right\}\ (55)$$

c) 諸　式　式 (55) を式 (12)～(15) に代入すると

1) 変位 y

$$\begin{aligned}
y&=H/EI\,2ab(a^2+b^2)^2(b\sinh 2al+2\sin 2bl)\\
&\quad\cdot[(a^2+b^2)\{a^2\cosh ax\cos b(2l-x)\\
&\quad+b^2\cosh a(2l-x)\cos bx\}\\
&\quad+ab(a^2+b^2)\{\sinh a(2l-x)\sin bx\\
&\quad-\sinh ax\sin b(2l-x)\}\\
&\quad+4ab(b^2-a^2)\sinh ax\sin bx\\
&\quad-(a^4+b^4-6a^2b^2)\cosh ax\cos bx]\cdots\cdots(56)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(y)_{x=0}&=H/EI\,2ab(a^2+b^2)(b\sinh 2al+a\sin 2bl)\\
&\quad\cdot[(a^2+b^2)(a^2\cos 2bl+b^2\cosh 2al)\\
&\quad-(a^4+b^4-6a^2b^2)]\cdots\cdots(57)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(y)_{x=l}&=2H/EI(a^2+b^2)^2(b\sinh 2al+a\sin 2bl)\\
&\quad\cdot[2ab\cosh al\cos bl+(b^2-a^2)\sinh al\sin bl]\\
&\quad\cdots\cdots(58)
\end{aligned}$$

2) 傾斜角 $\dfrac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx}&=H/EI\,2ab(a^2+b^2)(b\sinh 2al+a\sin 2bl)\\
&\quad\cdot[(a^2+b^2)\{a\sinh ax\cos b(2l-x)\\
&\quad-b\sin bx\cosh a(2l-x)\}\\
&\quad-(3a^2-b^2)(b\sin bx\cosh ax\\
&\quad-a\cos bx\sinh ax)]\cdots\cdots(59)
\end{aligned}$$

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=0}=0$（拘束条件を満足）

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l}&=\frac{H}{EI}\cdot 2a(a\sinh al\cos bl\\
&\quad-b\cosh al\sin bl)/b(a^2+b^2)(b\sinh 2al\\
&\quad+a\sin 2bl)\cdots\cdots(60)
\end{aligned}$$

3) 曲げモーメント　$-EI\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$\begin{aligned}
-EI\frac{d^2y}{dx^2}&=-H/2ab(b\sinh 2al+a\sin 2bl)\\
&\quad\cdot[a^2\cosh ax\cos b(2l-x)\\
&\quad-b^2\cosh a(2l-x)\cos bx\\
&\quad+ab\{\sinh ax\sin b(2l-x)\\
&\quad+\sinh a(2l-x)\sin bx\}\\
&\quad+(b^2-a^2)\cosh ax\cos bx\\
&\quad-2ab\sinh ax\sin bx]\cdots\cdots(61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-EI\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=0}&=M_0=H\{a^2(1-\cos 2bl)\\
&\quad+b^2(\cosh 2al-1)\}/2ab(b\sinh 2al+a\sin 2bl)\\
&\quad\cdots\cdots(62)
\end{aligned}$$

$-EI\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=l}=0$（分子が 0 となる故，拘束条件を満足）

4) せん断力　$EI\dfrac{d^3y}{dx^3}$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=H/2ab(b\sinh 2al+a\sin 2bl)$$
$$\cdot[2a^2b\cosh ax\sin b(2l-x)$$
$$-a(b^2-a^2)\sinh ax\cos b(2l-x)$$
$$-(a^2+b^2)(b\sin bx\cosh ax$$
$$+a\cos bx\sinh ax)$$
$$+b\{2ab\sinh a(2l-x)\cos bx$$
$$+(b^2-a^2)\cosh a(2l-x)\sin bx\}]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots(63)$$

$EI\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}=H$（分子と分母が等しくなる故。拘束条件を満足）

$EI\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=l}=0$　（分子が 0 となる故。拘束条件を満足）

（3）頭部回転自由，先端ヒンジの場合（Case 3）

a）拘束条件

杭頭 $x=0$ において

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$（回転自由），$EI\dfrac{d^3y}{dx^3}=H$（せん断力）

杭先端 $x=l$ において

$y=0$（先端ヒンジ），$\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$（回転自由）

b）積分定数　式（12）～（15）に前項の拘束条件を代入すると次のマトリックス式が得られる。

$$\begin{bmatrix} -b(b^2-3a^2) & a(a^2-3b^2) & -b(b^2-3a^2) & -a(a^2-3b^2) \\ 2ab & (a^2-b^2) & -2ab & (a^2-b^2) \\ e^{2al}\sin bl & e^{2al}\cos bl & \sin bl & \cos bl \\ e^{2al}\{(a^2-b^2)\sin bl+2ab\cos bl\} & e^{2al}\{(a^2-b^2)\cos bl-2ab\sin bl\} & \{(a^2-b^2)\sin bl-2ab\cos bl\} & \{(a^2-b^2)\cos bl+2ab\sin bl\} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} H/EI \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\cdots\cdots(64)$$

これより C_s は，$C=\Delta C/\Delta$ として

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta=4ab(a^2+b^2)^2e^{2al}(a\sin 2bl-b\sinh 2al)\\
&\Delta C_1=H/EI\cdot 2ab[(a^2-b^2)e^{-2al}\\
&\qquad+\{2ab\sin 2bl-(a^2-b^2)\cos 2bl\}]e^{2al}\\
&\Delta C_2=-H/EI\cdot 2ab[2abe^{-2al}\\
&\qquad-\{2ab\cos 2bl+(a^2-b^2)\sin 2bl\}]e^{2al}\\
&\Delta C_3=H/EI\cdot 2ab[2ab\sin 2bl\\
&\qquad-(a^2-b^2)(e^{2al}-\cos 2bl)]e^{2al}\\
&\Delta C_4=H/EI\cdot 2ab[(a^2-b^2)\sin 2bl\\
&\qquad+2ab(e^{2al}-\cos 2bl)]e^{2al}
\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots(65)$$

c）諸　式　式（65）を式（12）～（15）に代入すると

1）変位 y

$$y=H/EI(a^2+b^2)^2(b\sinh 2al-a\sin 2bl)$$
$$\cdot[2ab\{\cosh a(2l-x)\cos bx-\cosh ax\cos b(2l-x)\}$$
$$-(b^2-a^2)\{\sinh a(2l-x)\sin bx$$
$$-\sinh ax\sin b(2l-x)\}]\cdots\cdots\cdots\cdots(66)$$

$$(y)_{x=0}=H/EI\cdot(\cosh 2al-\cos 2bl)/$$
$$(a^2+b^2)(b\sinh 2al-a\sin 2bl)\cdots\cdots(67)$$

$(y)_{x=l}=0$（分子がとなる故。拘束条件を満足）

2）傾斜角 $\dfrac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=-H/EI(a^2+b^2)(b\sinh 2al-a\sin 2bl)$$
$$\cdot[a\{\sin bx\cosh a(2l-x)$$
$$+\sin b(2l-x)\cosh ax\}$$
$$+b\{\cos bx\sinh a(2l-x)$$
$$+\cos b(2l-x)\sinh ax\}]\cdots\cdots\cdots(68)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=-H/EI\cdot(b\sinh 2al+a\sin 2bl)$$
$$/(a^2+b^2)(b\sinh 2al-a\sin 2bl)\cdots(69)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l}=-2H/EI\cdot(a\cosh al\sin bl$$
$$+b\sinh al\cos bl)$$
$$/(a^2+b^2)(b\sinh 2al-a\sin 2bl)\cdots(70)$$

3）曲げモーメント　$-EI\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$$-EI\frac{d^2y}{dx^2}=H\{\sinh ax\sin b(2l-x)$$
$$-\sinh a(2l-x)\sin bx\}$$
$$/(b\sinh 2al-a\sin 2bl)\cdots\cdots\cdots(71)$$

$x=0$ および $x=l$ においては分子が 0 となる故 $-EI\dfrac{d^2y}{dx^2}=0$，したがって，拘束条件を満足する。

4）せん断力　$EI\dfrac{d^3y}{dx^3}$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=H/(a\sin 2bl-b\sinh 2al)$$
$$\cdot[a\{\sin b(2l-x)\cosh ax$$
$$+\sin bx\cosh a(2l-x)\}$$
$$-b\{\cos b(2l-x)\sinh ax$$
$$+\cos bx\sinh a(2l-x)\}]\cdots\cdots\cdots(72)$$

$EI\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}=H$（分子と分母が等しくなる故，拘束条件を満足）

$$EI\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=l}=2(b\sinh al\cos bl$$

$$-a\cosh al\sin bl)$$
$$/(b\sinh 2al-a\sin 2bl) \quad \cdots\cdots(73)$$

$\left|EI\left(\dfrac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=l}\right|>0.1N$ の場合には，先端において滑動の生ずる恐れがあり，この場合には **4(3)** 節の適用外となる。

5）最大曲げモーメント $M_{\max}$ とその位置 $x_{M\max}$

式 (72) を 0 とおくことにより $M_{M\max}$ が，またそれを式 (71) に代入することにより $M_{\max}$ が求められる。

（4） Case 1 に対する Case 2 および Case 3 との比較

a）Case 1 と Case 2 との比較

1）頭部固定モーメント：式 (51) と式 (62) とから

$$\frac{\text{Case 2}}{\text{Case 1}}=\frac{b^2(\cosh 2al-1)+a^2(1-\cos 2bl)}{b\sinh 2al+a\sin 2bl}\cdot\frac{\cosh 2al+\cos 2bl}{b\sinh 2al+a\sin 2bl}$$
$$\fallingdotseq(\cosh 2al/\sinh 2al)^2>1$$

2）杭頭変位 $(y)_{x=0}$：式 (47) と式 (57) とから

$$\frac{\text{Case 2}}{\text{Case 1}}$$
$$=\frac{(a^2+b^2)(a^2\cos 2bl+b^2\cosh 2al)-(a^4+b^4-6a^2b^2)}{(a^2+b^2)(b\sinh 2al+a\sin 2bl)}$$
$$\cdot(\cosh 2al+\cos 2bl)/(b\sinh 2al-a\sin 2bl)$$
$$\fallingdotseq b^2\cosh 2al/b\sinh 2al\cdot\cosh 2al/b\sinh 2al>1$$

b）Case 1 と Case 3 の比較　杭頭変位については式 (47) と式 (67) とから

$$\frac{\text{Case 3}}{\text{Case 1}}=\frac{(b\cosh 2al-b\cos 2bl)}{(b\sinh 2al-a\sin 2bl)}\cdot\frac{2(a\cosh 2al+a\cos 2bl)}{(b\sinh 2al-a\sin 2bl)}$$
$$\fallingdotseq\cosh 2al/\sinh 2al\cdot 2\cdot a/b\cdot\cosh 2al/\sinh 2al$$
$$\fallingdotseq 2$$

（5） 軸方向力考慮の有無が各種特性値に及ぼす影響

軸方向力考慮の場合 $p=p$，考慮しない場合 $p=0$ とおけばよい。

a）頭部回転固定，先端ヒンジの場合（Case 1）

1）杭頭変位 $y_{x=0}$

式 (47) に式 (11) を代入すると

$$y_{x=0}=H/EI\,4\beta^2\cdot(\sinh 2al/a-\sin 2bl/b)$$
$$/(\cosh 2al+\cos 2bl)$$

$$\frac{y_{0,p=p}}{y_{0,p=0}}=\frac{\cosh 2\beta l+\cos 2\beta l}{\cosh 2\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot l+\cos 2\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot l}$$
$$\cdot\frac{\beta/\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot\sinh 2\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot l-\beta/\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot\sinh 2\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot l}{\sinh 2\beta l-\sin 2\beta l}\quad\cdots\cdots(74)$$
$$=(>1)(>1)=(>1)$$

2）杭頭固定モーメント M_0

式 (51) と式 (11) とから

$$M_0=H/2\cdot(\sinh 2al/a+\sin 2bl/b)$$
$$/(\cosh 2al+\cos 2bl)$$

$$\frac{M_{0,p=p}}{M_{0,p=0}}=\frac{\sinh 2\sqrt{\beta^2-p^2/4}\cdot l/\sqrt{\beta^2-p^2/4}+\sin 2\sqrt{\beta^2+p^2/4}\cdot l/\sqrt{\beta^2+p^2/4}}{\sinh 2\beta l/\beta+\sin 2\beta l/\beta}$$
$$\cdot\frac{\cosh 2\beta l+\cos 2\beta l}{\cosh 2\sqrt{\beta^2-p^2/4}\,l+\cos 2\sqrt{\beta^2+p^2/4}\,l}\quad\cdots\cdots(75)$$
$$=(>1)(>1)=(>1)$$

b）頭部回転固定，先端変位自由の場合（Case 2）

1）杭頭変位 $y_{x=0}$

式 (57) と式 (11) とから

$$y_{x=0}=H/EI\,4\beta^2\cdot(b/a^2\cdot\cosh 2al$$
$$+1/b\cdot\cos 2bl-4\beta^4/a^2b+8b)$$
$$/(b/a\cdot\sinh 2al+\sin 2bl)$$

$$\frac{y_{0,p=p}}{y_{0,p=0}}=\frac{b/a^2\cdot\cosh 2al+1/b\cdot\cos 2bl-4\beta^4/a^2b+8b}{(\cosh 2\beta l+\cos 2\beta l)/\beta+4\beta}$$
$$\cdot(\sinh 2\beta l+\sin 2\beta l)$$
$$/(b/a\cdot\sinh 2al+\sin 2bl)\quad\cdots\cdots(76)$$
$$>1$$

2）杭頭固定モーメント　M_0

式 (62) と式 (11) とから

$$M_0=H/2\cdot\{b/a^2\cdot(\cosh 2al-1)+1/b\cdot(1-\cos 2bl)\}$$
$$/\{b/a\cdot\sinh 2al+\sin 2bl\}$$

$$\frac{M_{0,p=p}}{M_{0,p=0}}=\frac{b/a^2\cdot\cosh 2al-1/b\cdot\cos 2bl-(b^2-a^2)/a^2b}{(\cosh 2\beta l-\cos 2\beta l)/\beta}$$
$$\cdot\frac{\sinh 2\beta l+\sin 2\beta l}{b/a\cdot\sinh 2al+\sin bl}\quad\cdots\cdots(77)$$
$$>1$$

c）頭部回転自由，先端ヒンジの場合（Case 3）

杭頭変位 $y_{x=0}$ は式 (67) と式 (11) とから

$$y_{x=0}=H/EI\,2\beta^2\cdot(\cosh 2al-\cos 2bl)$$
$$/(b\sinh 2al-a\sin 2bl)$$

$$\frac{y_{0,p=p}}{y_{0,p=0}}=\frac{\cosh 2\sqrt{\beta^2-p^2/4}\,l-\cos 2\sqrt{\beta^2+p^2/4}}{\cosh 2\beta l-\cos 2\beta l}$$
$$\cdot\frac{\beta(\sinh 2\beta l-\sin 2\beta l)}{\sqrt{\beta^2+p^2/4}\sinh 2\sqrt{\beta^2-p^2/4}\,l-\sqrt{\beta^2-p^2/4}\sin 2\sqrt{\beta^2+p^2/4}\,l}\quad\cdots\cdots(78)$$
$$<1$$

5．数値計算例

（1） 杭の仕様

600 mm PC杭，$d_0=60$ cm，$t=10$ cm，

$EI=2\cdot 15\times 10^{10}$ kg/cm²，$K=0.95$ kg/cm³，

$k=0.95\times 60=57$ kg/cm²，$\beta=2.755\times 10^{-3}$ cm⁻¹，

$\beta^2=0.76\times10^{-5}$, $N=210\times10^3$ kg, $H=16\times10^3$ kg,

$p^2=210\times10^3/(2.15\times10^{10})=0.975\times10^{-5}$,

$a=\sqrt{0.76\times10^{-5}-0.975\times10^{-5}/4}=2.3\times10^{-3}$

$b=\sqrt{0.76\times10^{-5}+0.975\times10^{-5}/4}=3.18\times10^{-3}$

(2)　半無限長杭の場合（$\beta l>\pi$ の場合）

a）杭頭回転固定の場合

1）杭頭変位　式（39）より

$y_{0,N}/y_0=2.755\times10^{-3}/(2.3\times10^{-3})=1.2$

2）杭頭固定モーメント　式（40）より

$M_{0,N}/M_0=2.755\times10^{-3}/(2.3\times10^{-3})=1.2$

3）杭頭におけるせん断力　式（41）より

$$\left(EI\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0,N}\Big/\left(EI\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}=1$$

4）$y=0$ となる第1不動点の位置　式（42）より

$$x_{1,N}/x_1=2.755\times10^{-3}/(3.18\times10^{-3})\cdot[\pi-\tan^{-1}\{3.18\times10^{-3}/(2.13\times10^{-3})\}]\cdot4/3\pi=0.806$$

b）杭頭回転自由の場合

1）杭頭変位　式（39）′より

$y_{0,N}/y_0=2.3\times10^{-3}/(2.755\times10^{-3})=0.835<1$

2）杭頭における傾斜角　式（43）より

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0,N}\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}=1$$

3）杭頭におけるせん断力　式（41）′より

$$\left(EI\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0,N}\Big/\left(EI\frac{d^3y}{dx^3}\right)_{x=0}=1$$

4）$y=0$ となる第1不動点の位置　式（42）′より

$$x_{1,N}/x_1=2.755\times10^{-3}/(3.18\times10^{-3})\cdot\tan^{-1}(4\times2.3\times10^{-3}\times3.18\times10^{-3}\times10^5/0.975)\cdot2/\pi=0.688<1$$

5）最大曲げモーメント（$n=0$ の場合）とその位置　式（38）′より

$$M_{\max,N}/M_{\max}=\exp^{-1}[2.3\times10^{-3}/(3.18\times10^{-3})\cdot\tan^{-1}(3.18\times10^{-3}/(2.3\times10^{-3}))\}-1/4]=0.647<1$$

$$x_{2,N}/x_2=\tan^{-1}\{3.18\times10^{-3}/(2.3\times10^{-3})\}/(3.18\times10^{-3})/\pi\cdot(4\times2.755\times10^{-3})=1.04>1$$

(3)　有限長杭の場合（$\beta l<\pi$ の場合）

$l=1\,500$ cm とする。したがって

$2al=2\times2.3\times10^{-3}\times1.5\times10^3=6.90$

$2bl=2\times3.18\times10^{-3}\times1.5\times10^3=9.54$

$2\beta l=2\times2.76\times10^{-3}\times1.5\times10^3=8.27$

$\cosh 2al=496.1$, $\sinh 2al=496.1$,

$\cos 2bl=-0.993$, $\sin 2bl=-0.115$,

$\cosh 2\beta l=1.943$, $\sinh 2\beta l=1.943$,

$\cos 2\beta l=-0.400$, $\sin 2\beta l=0.917$

a）頭部回転固定，先端ヒンジの場合（Case 1）

1）杭頭変位 $y_{x=0}$　式（74）より

$$\frac{y_{0,p=p}}{y_{0,p=0}}=\frac{1.943-0.400}{496.1-0.993}\cdot\frac{2.755\times10^{-3}/(2.3\times10^{-3})\cdot496.1+2.755\times10^{-3}/(3.18\times10^{-3})\cdot0.115}{1.943-0.917}=1.201$$

2）杭頭固定モーメント M_0　式（75）より

$$\frac{M_{0,p=p}}{M_{0,p=0}}=\frac{496.1/(2.3\times10^{-3})-0.115/(3.18\times10^{-3})}{1.943/(2.755\times10^{-3})+0.917/(2.755\times10^{-3})}\cdot\frac{1.943-0.400}{496.1-0.993}=1.199$$

b）頭部回転固定，先端変位自由の場合（Case 2）

1）杭頭変位 $y_{x=0}$　式（76）より

$$\frac{y_{0,p=p}}{y_{0,p=0}}=\{3.18\times10^{-3}/(2.3^2\times10^{-6})\times496.1-0.993/(3.18\times10^{-3})-4\times2.755^4\times10^{-12}/(2.3^2\times10^{-6}\times3.18\times10^{-3})+8\times3.18\times10^{-3}\}/\{(1.943-0.400)/(2.755\times10^{-3})+4\times2.755\times10^{-3}\}\times(1.943+0.917)/\{3.18\times10^{-3}/(2.3\times10^{-3})\times496.1-0.115\}=1.198$$

2）杭頭固定モーメント M_0　式（77）より

$$\frac{M_{0,p=p}}{M_{0,p=0}}=3.18\times10^{-3}/(2.3^2\times10^{-6})\times496.1+0.993/(3.18\times10^{-3})-(3.18^2\times10^{-6}-2.3^2\times10^{-6})/(2.3^2\times10^{-6}\times3.18\times10^{-3})]/[(1.943+0.400)/(2.755\times10^{-3})]\times(1.943+0.917)/\{3.18\times10^{-3}/(2.3\times10^{-3})\times496.1-0.115\}=1.198$$

c）頭部回転自由，先端ヒンジの場合（Case 3）

杭頭変位 $y_{x=0}$ については，式（78）より

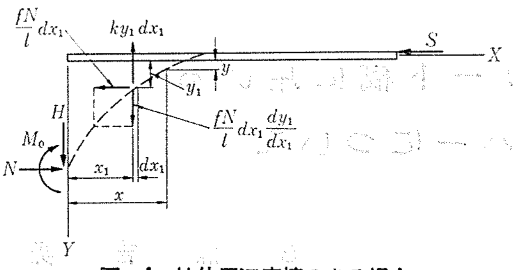
$$\frac{y_{0,p=p}}{y_{0,p=0}}=\frac{496.1+0.993}{1.943+0.400}\times\frac{2.755\times10^{-3}(1.943-0.917)}{3.18\times10^{-3}\times496.1+2.3\times10^{-3}\times0.115}=0.867$$

6．軸方向力考慮の有無が杭頭に水平力を受ける杭の挙動に及ぼす影響

5(1)，**5(2)** および **5(3)** から，半無限長または有限長にかかわらず次の傾向が判明した。

(1)　杭頭固定の場合

1）杭頭変位および杭頭固定モーメントは同率だけ増加する（約 20% 増）。



図—4　杭体周辺摩擦のある場合

2)　杭頭におけるせん断力は不変である。

3)　第1不動点の位置は杭頭に近付く（約20％減)。

（2）　杭頭回転自由の場合

1)　杭頭変位は減少する（半無限長の場合約 16.5％減，有限長の場合約 13.3％ 減)

2)　杭頭における傾斜角およびせん断力は不変である。

3)　第1不動点の位置は杭頭に近付く（約31％減)。

4)　最大曲げモーメントは減少し（約35％減)，その位置は杭頭より遠退く（約 4％ 増)。

（3）　軸方向力は杭頭固定の場合不利に働らくが，これに反して杭頭回転自由の場合は有利に働らく。

7．摩擦杭の場合の基本式序説

図—4 において，次のように仮定する。

1)　杭の周辺摩擦は杭全長に亘って一様とする。

2)　杭頭に働らく軸方向力 N に対して周辺摩擦力の総計を $fN(0<f<1)$ とする。

$f=0$ のときは完全先端支持杭，$f=1$ のときは完全摩擦抗，$0<f<1$ のときは中間程度の摩擦抗である。

3)　杭先端支持力 S は $S=N(1-f)$ で与えられる。

図—4 において，杭のx断面における曲げモーメントの釣合いを考えると

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=-N(y-y_0)-\int_0^x\left(ky_1dx_1-\frac{fN}{l}dx_1\frac{dy_1}{dx_1}\right)(x-x_1)+\int_0^x\frac{fN}{l}dx_1(y-y_1)+Hx-M_0$$
$$=Hx-N(y-y_0)-M_0-k\left\{-x\left[\int ydx\right]_0+\int_0^x dx\int ydx\right\}+\frac{fN}{l}\{-xy_{x=0}+yx\} \quad\cdots\cdots(79)$$

式 (79) をxによって遂次微分することにより

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=H-N\frac{dy}{dx}-k\left\{-\left[\int ydx\right]_0+\int ydx\right\}+\frac{fN}{l}\left\{-y_{x=0}+x\frac{dy}{dx}+y\right\}$$

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=-N\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{fN}{l}x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{fN}{l}\cdot\frac{dy}{dx}-ky$$

あるるいは

$$\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{N}{EI}\frac{d^2y}{dx^2}\left(1-\frac{f}{l}x\right)-2\frac{N}{EI}\cdot\frac{f}{l}\frac{dy}{dx}+\frac{k}{EI}y=0 \quad\cdots\cdots(80)$$

式 (3) を上式に代入すると，

$$\frac{d^4y}{dx^4}+p^2\frac{d^2y}{dx^2}\left(1-\frac{f}{l}x\right)-2p^2\frac{f}{l}\frac{dy}{dx}+4\beta^4y=0 \quad\cdots\cdots(81)$$

1976.4.20・受付
