

# 任意シェルの曲げ理論と数値解法

横 道 英 雄\*

## まえがき

コンクリート構造物として、シェルの応用はかなり広い。シェルには図-1のa)~d)に示すように、縦軸のまわりに曲線または直線を子午線として回転させて得られる回転面をもつもの、したがって、縦軸に直角な断面が図のe)に示すように円形となる回転シェルと、断面が楕円形、卵形、馬蹄形その他の曲線となる非回転シェルとがある。b)~d)のように特定形状の場合の解析は比較的簡単であるが、それでも厚さが変化する場合には解を求めるのに容易でない。それがa)のように任意形状のものとなると従来の古典解析法ではかなり複雑となり、非回転シェルではさらに困難となる。

またシェルは一般には薄いシェルとして取扱うが、しかし断面に生ずる偶応力(曲げおよびねじりモーメント)を無視する膜理論では近似的にすぎるので、コンクリートシェルでは、これを無視しない曲げ理論を用いるべきであろう。また同じ曲げ理論を用いる場合でも、シェルの中心曲面に対する幾何学的諸元を用いて解析する近似法が従来用いられているが、厳密には、厚さ方向における位置の変化に伴う曲面の骨組みの変化を考慮に入

れなければならない。

本文では以上に述べた厳密な曲げ理論を用いて任意形状のシェルの解析を行うためテンソル解析を応用した。テンソル解析は曲面幾何を取扱うのに有利であり、とくにシェルの場合、厚さ方向における曲面の幾何学的諸元の変化を規則的に取扱うことができる。本文で述べる解析方法は回転シェルだけでなく、平滑な閉曲線を断面形とする非回転シェルにも応用できる。シェルの微分方程式は一般にこれを理論的に解くことは困難であるから、本文ではフーリエ級数と差分法を用いて数値的に解を求めるようにした。なおテンソル解析そのものについての説明は必要最小限にとどめてあるので、その由来をさらに調べたい読者は拙著<sup>1)</sup>など専門の文献を参考とされたい。

## 1. シェルの曲げ理論基礎式

図-2はシェルの曲面に垂直な断面の一部を示すが、いまシェルの厚さの中心を通る曲面を $S_0$ 面、中心からの距離と厚さの比が一定な点を通る任意の曲面を $S$ 面と呼ぶものとする。 $S_0$ 面上の点 $P_0$ の曲面座標を $x^\alpha$  ( $\alpha=1, 2$ )\*\*とし、また $P_0$ における $S_0$ 面に対する外向

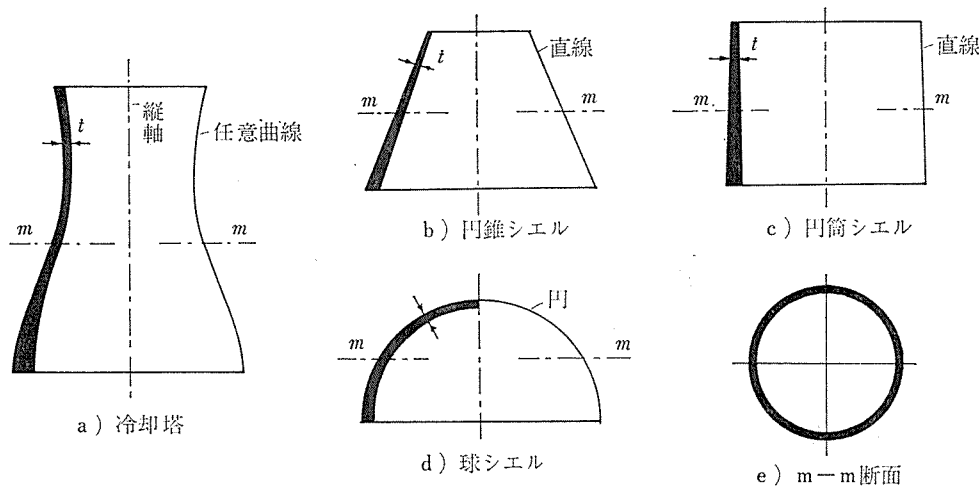


図-1 回転シェル

\* 工博 北海道大学名誉教授

\*\* 英字の添字(例えば  $a$ )はすべて1, 2, 3の値を、またギリシャ文字の添字(例えば  $\alpha$ )はすべて1, 2の値をとるものとする。

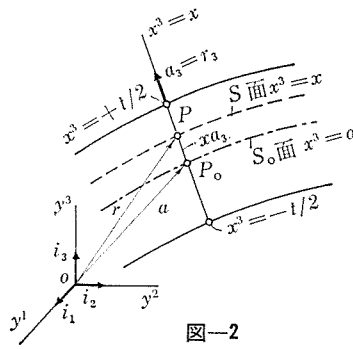


図-2

きの法線方向に直線座標軸  $x^3$  をとり、 $P_0$  と同じ  $x^3$  軸上で  $S$  面上にある点を  $P$  とする。またシエル全体に対する基準の直交カルテシアン座標を  $y^a (a=1, 2, 3)$  としこれに関する  $P_0$  および  $P$  の位置ベクトルをそれぞれ  $a$  および  $r$ 、座標を  $y_0^a$  および  $y^a$  とするとき、 $S_0$  および  $S$  面の幾何学的骨組みをつくる基本ベクトルは  $y^a$  軸の単位ベクトルを  $i_a$  とするとそれぞれ次のように定義される (文献 1) p. 21)。

$$\left. \begin{aligned} S_0 \text{ 面} \\ a_\alpha = \frac{\partial a}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial y_0^a}{\partial x^\alpha} i_a, \quad a^\alpha = a^{\alpha\beta} a_\beta, \quad a_3 = a^3 \\ S \text{ 面} \\ r_\alpha = \frac{\partial r}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial y^a}{\partial x^\alpha} i_a, \quad r^\alpha = g^{\alpha\beta} r_\beta, \quad r_3 = r^3 = a_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.1)$$

上式のうち  $a_3$  および  $r_3$  は単位ベクトルとなる。また  $a$  および  $\beta$  のように添字が二度繰り返されているときはこれをダミー添字とい英文の場合は 1, 2, 3, ギリシャ文字の場合は 1, 2 に対しそれぞれ和をとるものとする。また  $a^{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}$  は次式で定義される  $S_0$  および  $S$  面の第 1 基本量すなわち計量テンソル  $a_{\alpha\beta}$  および  $g_{\alpha\beta}$  の逆行列に相当する。

$$\left. \begin{aligned} a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta = a_{\beta\alpha}, \quad a_{33} = 1, \quad a_{\alpha 3} = a_{3\alpha} = 0 \\ g_{\alpha\beta} = r_\alpha \cdot r_\beta = g_{\beta\alpha}, \quad g_{33} = 1, \quad g_{\alpha 3} = g_{3\alpha} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.2)$$

位置ベクトル  $a$  と  $r$  との間には 図-2 から

$$r = a + x^3 a = a + x a_3 \dots\dots\dots(1.3)$$

の関係があるので、 $S_0$  面および  $S$  面の骨組みの間には次の関係がある (文献 2) p. 2)。

$$\left. \begin{aligned} r_\alpha = \mu^\lambda_\alpha a_\lambda, \quad a_\alpha = \nu^\lambda_\alpha r_\lambda \\ r^\alpha = \nu^\alpha_\lambda a^\lambda, \quad a^\alpha = \mu^\alpha_\lambda r^\lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.4)$$

ただし

$$\mu^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha - x h^\beta_\alpha \dots\dots\dots(1.5)$$

で、この  $\mu^\beta_\alpha$  を骨組み変換係数といい、 $\nu^\beta_\alpha$  はその逆行列に相当する。また  $h^\beta_\alpha$  は

$$\left. \begin{aligned} h^\beta_\alpha = a^{\beta\lambda} h_{\lambda\alpha} = -a^\beta \cdot a_{3,\alpha} \\ h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha} = a_{\alpha,\beta} \cdot a_3 = -a_\beta \cdot a_{3,\alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1.6)$$

により求められるが、 $h_{\alpha\beta}$  は  $S_0$  面に関する第 2 基本量

と呼ばれるものである。また上式では  $x^\alpha$  などによる偏微分係数を

$$(\quad)_{,\alpha} = \partial(\quad) / \partial x^\alpha$$

のように略記号で表わしており、以下すべてこれに準じた略記号を添字として用いることにする。

次にテンソル解析に用いられるクリストッフエルの第 2 種記号は (文献 1) p. 102)

$$\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \alpha \gamma \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \gamma \alpha \end{matrix} \right\} = a_{\alpha,\gamma} \cdot a^\beta = a_{\gamma,\alpha} \cdot a^\beta \dots\dots(1.7)$$

で求められる。

曲面座標  $x^\alpha$  には直交座標系を用いるのが普通であるが、この場合には特定の添字  $\alpha$  および  $\beta (\neq \alpha)$  に対して

$$\left. \begin{aligned} a_{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} = 0 \\ a^\alpha = 1/a_{\alpha\alpha}, \quad g^\alpha = 1/g_{\alpha\alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.8)$$

$$\left. \begin{aligned} h_{\alpha\beta} = h_{\beta\alpha} = h^\alpha_\beta = 0 \\ \mu^\beta_\alpha = \nu^\beta_\alpha = 0, \quad \nu^\alpha_\alpha = 1/\mu^\alpha_\alpha \\ \mu^\alpha_\alpha = \sqrt{g_{\alpha\alpha}/a_{\alpha\alpha}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.9)$$

となる。ただし  $\alpha$  および  $\beta$  は特定の添字であるから式および式 (1.9) 中で二度繰り返されていても和をとらないものとする。また直交座標系におけるクリストッフエルの記号は同じく  $\alpha, \beta$  に対して次のようになる。

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \alpha \beta \end{matrix} \right\} = \frac{a_{\alpha\alpha,\beta}}{2 a_{\alpha\alpha}}, \quad \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \alpha \alpha \end{matrix} \right\} = \frac{a_{\alpha\alpha,\alpha}}{2 a_{\alpha\alpha}} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \beta \end{matrix} \right\} = -\frac{a_{\alpha\alpha,\beta}}{2 a_{\beta\beta}} \dots\dots\dots(1.10)$$

次に応力とひずみもしくは変位との関係式をレオロジ一方程式と呼ぶが、シエルの場合には通常次の 3 つの仮定が成立つものとしている。

- 1) シエルの厚さ  $t$  は任意の変化をしてもよいが、 $S_0$  面の最小曲率半径を  $R$  とするとき  $|t/R| \ll 1$  であること (薄いシエルの仮定)。
- 2) シエルは平面応力状態に近いものとして  $\sigma^{33} \doteq 0$ 、ひずみは一般に微小で、とくに任意点におけるひずみ  $\bar{\epsilon}_{ij}$  のうち  $|\bar{\epsilon}_{33}|, |\bar{\epsilon}_{3\alpha}|$  はいずれも  $|t/R|$  より十分小さく、 $|\bar{\epsilon}_{33,\alpha}| \ll 1$  であること。
- 3) したがって、シエルの変形前同じ  $x^3$  軸上にあった各点は変形後も同じ線上にあること。

いま 図-2 の  $P_0$  および  $P$  における変位ベクトルを  $d$  および  $u$  とし曲面の骨組みに関する成分を

$$\left. \begin{aligned} d = d_1 a^1 + d_2 a^2 + d_3 a^3 = d_\alpha a^\alpha + d_3 a^3 \\ u = u_\alpha r^\alpha + u_3 r^3 = v_\alpha a^\alpha + v_3 a^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.11)$$

とおくものとする。上式で  $u_\alpha$  は  $u$  の  $r^\alpha$  に関する成分であるが、これを  $S_0$  面の骨組み  $a^\alpha$  に変換したものが  $v_\alpha$  である。仮定 2) および 3) を用いると変位テン

ソル  $d_\alpha$  と  $v_\alpha$  の間には近似的に

$$v_\alpha = d_\alpha - x(w_{,\alpha} + h^\lambda_\alpha d_\lambda) \quad v_3 = d_3 = w \dots (1.12)$$

の関係が得られ、また任意点  $P$  のひずみテンソル  $\bar{r}_{\alpha\beta}$  は  $S_0$  面の骨組みに関する成分で表わして

$$2\bar{r}_{\alpha\beta} = \mu^2_\alpha [d_{\lambda;\dot{\beta}} - xw_{,\lambda;\dot{\beta}} - x(h^\lambda_\alpha d_\lambda)_{;\dot{\beta}}] \\ + \mu^2_\beta [d_{\lambda;\dot{\alpha}} - xw_{,\lambda;\dot{\alpha}} - x(h^\lambda_\beta d_\lambda)_{;\dot{\alpha}}] \\ - (\mu^2_\alpha h_{\lambda\beta} + \mu^2_\beta h_{\lambda\alpha})w \dots (1.13)$$

のようになる。(文献 2) p. 5)。上式で添字  $\lambda$  はいずれもダミーとなっている。また  $d_{\lambda;\dot{\alpha}}$ , etc. は  $d_\lambda$  の  $x^\alpha$  による曲面共変微分係数を表わす (同 p. 2)。またフック・コーシーの法則を用いた線形弾性理論によるレオロジー方程式はこの場合

$$\left. \begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta} &= \frac{E}{1-\nu^2} A^{r\delta\epsilon\eta} \nu^\alpha_{,\gamma} \nu^\beta_{,\delta} \nu^\epsilon_{,\xi} \nu^\eta_{,\kappa\lambda} \bar{r}_{\kappa\lambda} \\ A^{r\delta\epsilon\eta} &= (1-\nu) a^{r\delta} a^{\epsilon\eta} + \nu a^{r\delta} a^{\epsilon\eta} \end{aligned} \right\} \dots (1.14)$$

で与えられる (文献 2) p. 4)。上式中の  $E$  および  $\nu$  は弾性係数およびポアソン比である。式 (1.13) および式 (1.14) はいずれも、あとで  $x^3=x$  について積分を行うのに便利のように  $S_0$  面の骨組みを基準としたテンソル表式を用いており、式中の  $\mu^2_\alpha$ ,  $\nu^\alpha_{,\gamma}$  などは式 (1.9) で定義される変換係数で  $x$  の 1 次関数である。

次に  $S_0$  面に直角でかつ  $a_\alpha$  したがって  $x^\alpha$  座標線に垂直な断面内における、 $a_\beta$  (すなわち  $x^\beta$  座標線) および  $a_3$  (すなわち  $x^3$  線) 方向の合応力を  $n^{\alpha\beta}$  および  $q^\alpha = n^{\alpha 3}$  とおけば次式によって与えられる (文献 2) p. 6)。

$$n^{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma^{\alpha\lambda} \mu^\beta_{,\lambda} k dx \dots (1.15)$$

$$q^\alpha = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma^{\alpha 3} k dx \dots (1.16)$$

上式はいずれも  $S_0$  面に沿った単位断面幅についての値である。また同じく合偶応力は

$$m^{\alpha\beta} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma^{\alpha\lambda} \mu^\beta_{,\lambda} k x dx \dots (1.17)$$

で与えられる。ただし以上の式における  $k$  は

$$k = |\mu^\alpha_\beta| \dots (1.18)$$

すなわち  $\mu^\alpha_\beta$  が決つくる行列式に等しく、 $x^3=x$  によって変化する。また上式の  $m^{\alpha\beta}$  の軸の方向は  $e_{\beta\gamma} a^\gamma$  の方向である。ただし  $e_{\beta\gamma}$  は  $e$  システムと呼ばれ

$$e_{11} = e_{22} = 0, \quad e_{12} = 1, \quad e_{21} = -1$$

の値をとるものである。

式 (1.15) および式 (1.17) に式 (1.13) および式 (1.14) に代入して積分を行った結果は、特定の添字  $\alpha$  および  $\beta$  ( $\cong \alpha$ ) に対し次のようになる (文献 2) p. 8)。

$$n^{\alpha\alpha} = D[A^{\alpha\alpha\alpha\alpha}(d_{\alpha;\dot{\alpha}} - h_{\alpha\alpha}w) + A^{\alpha\alpha\beta\beta}(d_{\beta;\dot{\beta}} - h_{\beta\beta}w)] \\ + KA^{\alpha\alpha\alpha\alpha}(h^\alpha_\alpha - h^\beta_\beta)[h^\alpha_\alpha d_{\alpha;\dot{\alpha}} - (h^\alpha_\alpha d_\alpha)_{;\dot{\alpha}} \\ - w_{,\alpha;\dot{\alpha}} - h^\alpha_\alpha h_{\alpha\alpha}w] \dots (1.19)$$

$$n^{\alpha\beta} = DA^{\alpha\beta\alpha\beta}(d_{\alpha;\dot{\beta}} + d_{\beta;\dot{\alpha}}) + KA^{\alpha\beta\alpha\beta}(h^\beta_\beta - h^\alpha_\alpha) \\ \cdot [w_{,\alpha;\dot{\beta}} - h^\alpha_\alpha d_{\beta;\dot{\alpha}} + (h^\beta_\beta d_\beta)_{;\dot{\alpha}}] \dots (1.20)$$

$$m^{\alpha\alpha} = -KA^{\alpha\alpha\alpha\alpha}[(h^\beta_\beta - h^\alpha_\alpha)(d_{\alpha;\dot{\alpha}} - h_{\alpha\alpha}w) + w_{,\alpha;\dot{\alpha}} \\ + (h^\alpha_\alpha d_\alpha)_{;\dot{\alpha}}] - KA^{\alpha\alpha\beta\beta}[w_{,\beta;\dot{\beta}} + (h^\beta_\beta d_\beta)_{;\dot{\beta}}] \\ \dots (1.21)$$

$$m^{\alpha\beta} = -KA^{\alpha\beta\alpha\beta}[(h^\beta_\beta - h^\alpha_\alpha)d_{\beta;\dot{\alpha}} + 2w_{,\alpha;\dot{\beta}} \\ + (h^\alpha_\alpha d_\alpha)_{;\dot{\beta}} + (h^\beta_\beta d_\beta)_{;\dot{\alpha}}] \dots (1.22)$$

$q^\alpha$  についても同様に式を誘導し得るが、解を求めるのに直接必要ないのでここには省略した。以上の式 (1.19)~式 (1.22) では、 $\alpha$  および  $\beta$  はいずれも特定の添字であるから 2 度繰返されていても和をとらない。また  $D$  および  $K$  はそれぞれ伸び剛度および曲げ剛度と呼ばれるもので

$$D = \frac{Et}{1-\nu^2}, \quad K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \dots (1.23)$$

で与えられ、式 (1.14) の  $A^{r\delta\epsilon\eta}$  はこの場合

$$\left. \begin{aligned} A^{\alpha\alpha\alpha\alpha} &= (a^{\alpha\alpha})^2, \quad A^{\alpha\alpha\beta\beta} = A^{\beta\beta\alpha\alpha} = \nu a^{\alpha\alpha} a^{\beta\beta} \\ A^{\alpha\beta\alpha\beta} &= A^{\beta\alpha\beta\alpha} = (1-\nu) a^{\alpha\alpha} a^{\beta\beta} \end{aligned} \right\} \dots (1.24)$$

となる。上記の式 (1.19)~式 (1.22) が求める任意のシエルに対するレオロジー方程式で 8 個の式が得られる。また一般に

$$n^{\alpha\beta} \cong n^{\beta\alpha}, \quad m^{\alpha\beta} \cong m^{\beta\alpha}$$

であることに注意を要する。

次に上述のレオロジー方程式だけでは未知量を求めるのに数が不足するので、これを補うため連続体の運動方程式を用い、これを平衡方程式と呼ぶ。物体力が無視されかつ加速度がない場合の運動方程式はテンソル表式では空間共変微分係数の形を用いて

$$\sigma^{rs}_{;r} = 0$$

で与えられる (文献 1) p. 167)。上式は

$$\left. \begin{aligned} s=2 \text{ の場合} \\ \sigma^{\alpha\beta}_{;\alpha} + \sigma^{\beta 3}_{;3} = 0 \\ s=3 \text{ の場合} \\ \sigma^{\alpha 3}_{;\alpha} + \sigma^{33}_{;3} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (1.25)$$

となる。上式は、第 1 式で  $\beta=1, 2$  とおくことにより合計 3 個の式が得られ、さらに  $\sigma^{\alpha\beta}$  の  $S_0$  面に対する曲げモーメントをつくれれば第 1 式から 2 個の式が得られるから、結局合計 5 個の式が得られるが、これをシエルの厚さ方向で積分すれば合応力  $n^{\alpha\beta}$  および合偶応力  $m^{\alpha\beta}$  に関する微分方程式が得られる。その結果は曲面共変微分方程式の形で

$$\left. \begin{aligned} n^{\alpha\beta}_{;\dot{\alpha}} - h^\beta_\alpha q^\alpha + p^\beta = 0 \\ h_{\alpha\beta} n^{\alpha\beta} + q^\alpha_{;\dot{\alpha}} + p^3 = 0 \\ m^{\alpha\beta}_{;\dot{\alpha}} - q^\beta + \bar{m}^\beta = 0 \end{aligned} \right\} \dots (1.26)$$

となる (文献 2) p. 9)。ただし  $p^\beta$  および  $p^3$  はシエ

ルの表面に働く単位面積あたりの荷重の  $a_\beta$  および  $a_\alpha$  に関する成分で  $\tilde{m}^\beta$  は

$$\tilde{m}^\beta = \frac{1}{2} t p^\beta \dots\dots\dots (1.27)$$

で定義される。式 (1.26) を展開すると次の5個の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} n^{11},_1 + n^{21},_2 + \left( 2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix} \right) n^{11} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{Bmatrix} n^{12} \\ + \left( 2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{Bmatrix} \right) n^{21} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{Bmatrix} n^{22} \\ - h^1_1 q^1 + p^1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^{12},_1 + n^{22},_2 + \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \ 1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix} \right) n^{12} \\ + \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{Bmatrix} \right) n^{22} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 1 \end{Bmatrix} n^{11} \\ + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix} n^{21} - h^2_2 q^2 + p^2 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_{11} n^{11} + h_{22} n^{22} + q^1, _1 + q^2, _2 + \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix} \right) q^1 \\ + \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{Bmatrix} \right) q^2 + p^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m^{11},_1 + m^{21},_2 + \left( 2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix} \right) m^{11} \\ + \left( 2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{Bmatrix} \right) m^{21} + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{Bmatrix} m^{12} \\ + \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{Bmatrix} m^{22} - q^1 + \tilde{m}^1 = 0 \end{aligned}$$

$$m^{12},_1 + m^{22},_2 + \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \ 1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix} \right) m^{12}$$

$$\begin{aligned} + \left( \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 1 \end{Bmatrix} + 2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{Bmatrix} \right) m^{22} + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 1 \end{Bmatrix} m^{11} \\ + \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix} m^{21} - q^2 + \tilde{m}^2 = 0 \end{aligned}$$

.....(1.28)

図-3 は  $x^\alpha$  が直交座標の場合の合応力、合偶応力および荷重の位置および方向を示すものである。 $p^\beta$  および  $t$  は一般に小さいので  $\tilde{m}^\beta$  を無視することが多い。

次に温度変化の影響を考慮する必要がある場合には、シエルの平均温度を  $T_0$ 、厚さ方向における温度勾配を  $dt$ 、膨張係数を  $\varepsilon$  とすれば、任意点  $P$  におけるひずみテンソル  $\bar{r}_{\alpha\beta}$  は  $S_0$  面の骨組みに関する成分として、特定の添字  $\alpha$  および  $\beta$  ( $\neq \alpha$ ) に対し

$$\begin{aligned} \bar{r}_{\alpha\alpha} &= -a_{\alpha\alpha} (\mu^\alpha_\alpha)^2 (T_0 + x dt) \varepsilon \\ \bar{r}_{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned}$$

となるから、これを式 (1.14) に代入して式 (1.15) および式 (1.17) を求めると

$$\begin{aligned} n^{\alpha\alpha}(T) &= -(1+\nu) a^{\alpha\alpha} [DT_0 - Kh^\beta_\beta dt] \varepsilon \\ m^{\alpha\alpha}(T) &= -(1+\nu) a^{\alpha\alpha} K [-h^\beta_\beta T_0 + 4t] \varepsilon \\ n_{\alpha\beta}(T) &= m^{\alpha\beta}(T) = 0 \end{aligned}$$

.....(1.29)

が得られる。ただし  $\alpha$  および  $\beta$  についての和はとらないものとする。

次に境界条件としては、いま  $x^1 = \text{一定}$  の面でシエルが支持もしくは自由端となっているとすれば、支持状態に応じて次のようになる。

a) 固定端 この場合は変位はすべて0であり、境

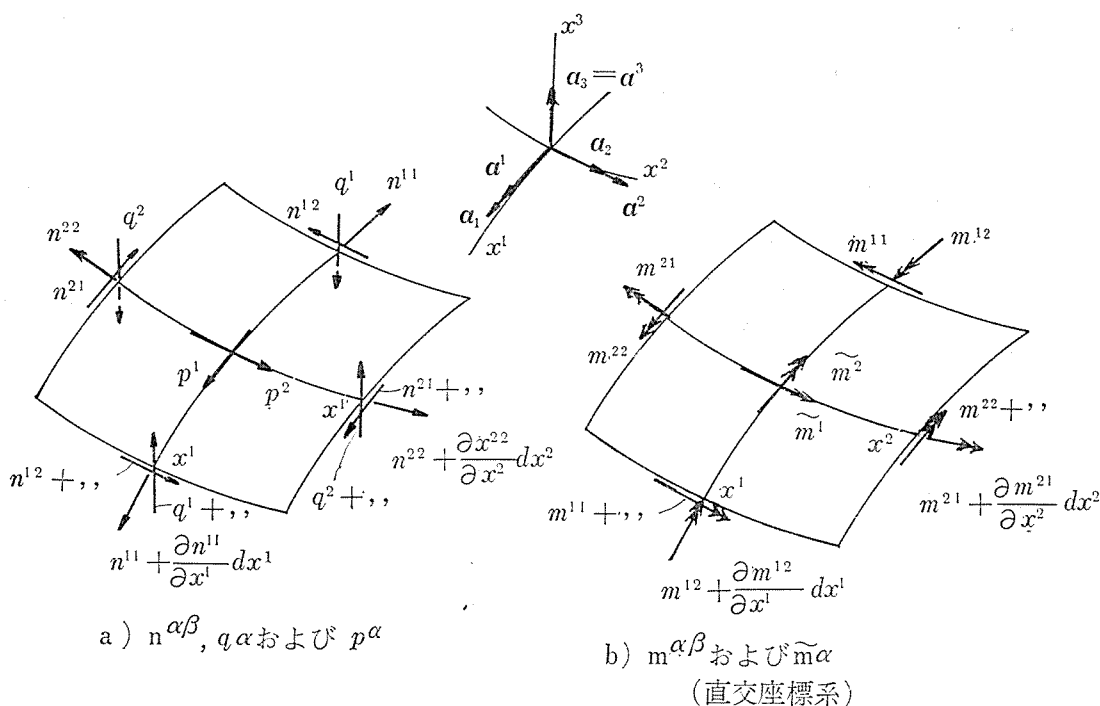


図-3

界曲線 ( $S_0$  面上の) に対する面内の法線方向が不変であるかから

$$d_1=0, d_2=0, w=0, w_{,1}=0$$

b) ヒンジ端 この場合は変位はすべて0であるほか曲げモーメントが0となるので

$$d_1=0, d_2=0, w=0, m^{11}=0$$

c) 可動ヒンジ端 この場合,  $S_0$  面に直角方向の変位は許され, したがって, この方向の反力は0となるので

$$d_1=0, d_2=0, m^{11}=0, q^1+m^{12}_{,2}=0$$

d) 単純支持端 この場合は直ちに

$$d_2=0, w=0, n^{11}=0, m^{11}=0$$

e) 自由端 この場合は, 支承線に対する  $S_0$  面内の法線方向の合応力, 接線方向の合偶応力, 支承面内における法線お接線方向の反力が0となるから

$$n^{11}=0, m^{11}=0, q^1+m^{12}_{,2}=0, n^{12}-m^{12}h^2_2=0$$

が得られる。

## 2. 任意回転シエルの微分方程式と数値解法

### (1) 幾何学的諸元

図-4 に示すような任意の曲線を子午線とする回転シエルにおいて, 基準の直交カルテシアン座標系  $y^\alpha$  を図のようにとり,  $y^1=0$  の面からの子午線の回転角を  $\theta$ ,  $y^3=0$  の面から  $S_0$  面上の子午線に沿って測った長さを  $s$ ,  $S_0$  面上の任意の点  $P_0$  において法線方向 (外向きを正とする) に  $x$  をとり, 法線と  $y^3$  軸の間の角を図のように  $\phi$  とする。いま座標系  $x^r$  を

$$x^1=s, x^2=\theta, x^3=x$$

とすると, 図-5 に示す  $S$  面上の任意の点  $P$  に関して

$$\left. \begin{aligned} y^1 &= (r_2+x) \sin \phi \sin \theta \\ y^2 &= (r_2+x) \sin \phi \cos \theta \\ y^3 &= f(\phi) - x \cos \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.1)$$

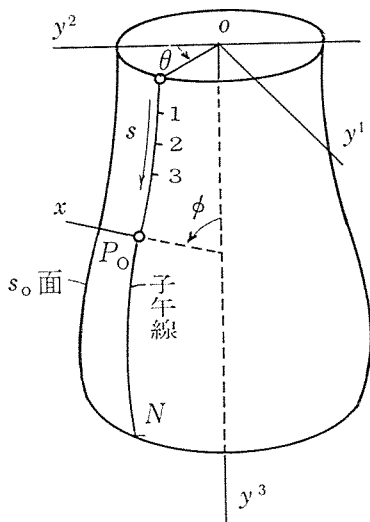


図-4

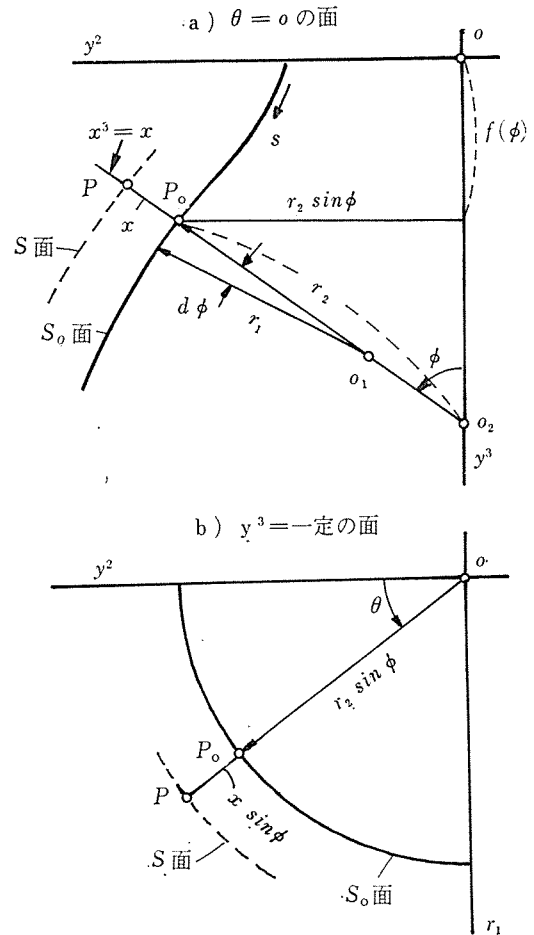


図-5

が成立つ。ただし  $r_2$  および  $f$  は図に示すとおりで, このうち  $r_2$  は  $P_0$  における主曲率半径の一つである。同じ点におけるもう一つの主曲率半径である子午線の曲率半径を  $r_1$  とすれば,  $r_1, r_2$  および  $f$  の間には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} (r_2 \sin \phi)_{,1} &= \frac{\partial (r_2 \sin \phi)}{\partial x^1} = \cos \phi \\ f_{,1} &= \frac{\partial f}{\partial x^1} = \sin \phi \\ r_{2,1} &= \frac{\partial r_2}{\partial x^1} = \frac{r_1 - r_2}{r_1} \cot \phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.2)$$

したがって,  $S$  面の基本ベクトルの成分は式 (1.1) より

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \left\{ \left(1 + \frac{x}{r_1}\right) \cos \phi \sin \theta, \left(1 + \frac{x}{r_1}\right) \cos \phi \cos \theta, \left(1 + \frac{x}{r_1}\right) \sin \phi \right\} \\ r_2 &= \{ (r_2+x) \sin \phi \cos \theta, -(r_2+x) \sin \phi \sin \theta, 0 \} \\ r_3 &= (\sin \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \theta, -\cos \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3)$$

となるから, 式 (1.2) による  $S$  面上の計量テンソル  $g_{\alpha\beta}$  およびその逆行列である  $g^{\alpha\beta}$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 g_{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} (1+x/r_1)^2 & 0 \\ 0 & (r_2+x)^2 \sin^2 \phi \end{bmatrix} \\
 g^{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (1+x/r_1)^2 & 0 \\ 0 & 1 \\ & (r_2+x)^2 \sin^2 \phi \end{bmatrix} \\
 g = |g_{\alpha\beta}| &= \frac{1}{r_1^2} (r_1+x)^2 (r_2+x)^2 \sin^2 \phi
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.4)$$

したがって、式 (1.1) により  $S$  面の相反基本ベクトルの成分は

$$\left. \begin{aligned}
 r^1 &= \left( \frac{\cos \phi \sin \theta}{1+x/r_1}, \frac{\cos \phi \cos \theta}{1+x/r_1}, \frac{\sin \phi}{1+x/r_1} \right) \\
 r^2 &= \left( \frac{\cos \theta}{(r_2+x) \sin \phi}, \frac{-\sin \theta}{(r_2+x) \sin \phi}, 0 \right) \\
 r^3 &= r_3
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.5)$$

となる。 $S_0$  面に対しては  $x=0$  とおくことより

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= (\cos \phi \sin \theta, \cos \phi \cos \theta, \sin \phi) \\
 a_2 &= (r_2 \sin \phi \cos \theta, -r_2 \sin \phi \sin \theta, 0) \\
 a_3 &= r_3 \\
 a^1 &= a_1 \\
 a^2 &= \left( \frac{\cos \theta}{r_2 \sin \phi}, \frac{-\sin \theta}{r_2 \sin \phi}, 0 \right) \\
 a^3 &= a_3
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.6)$$

$$\left. \begin{aligned}
 a_{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_2^2 \sin^2 \phi \end{bmatrix} \\
 a^{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_2^2 \sin^2 \phi} \end{bmatrix} \\
 a = |a_{\alpha\beta}| &= r_2^2 \sin^2 \phi
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.7)$$

が得られる。したがって、

$$\begin{aligned}
 a_{11,1} &= a_{11,2} = a_{22,2} = 0 \\
 a_{22,1} &= 2 r_2 \sin \phi \cos \phi
 \end{aligned}$$

となるから、 $S_0$  面上のクリストッフエルの記号は式 (1.10) より

$$\left. \begin{aligned}
 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= -r_2 \sin \phi \cos \phi, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r_2} \cot \phi
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.8)$$

だけで、このほかはすべて 0 となる。また式 (1.6) および式 (1.9) により

$$\left. \begin{aligned}
 h^1_1 &= -\frac{1}{r_1}, \quad h^2_2 = -\frac{1}{r_2}, \quad h_{11} = -\frac{1}{r_1} \\
 h_{22} &= -r_2 \sin^2 \phi, \quad h^1_{1,1} = \frac{\dot{r}_1}{r_1^2}, \quad h^1_{1,2} = 0 \\
 h^2_{2,1} &= \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2^2} \cot \phi, \quad h^2_{2,2} = 0, \quad \mu^1_1 = \frac{r_1 + x}{r_1}
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \mu^2_2 &= \frac{r_2 + x}{r_2}, \quad \nu^1_1 = \frac{r_1}{r_1 + x}, \quad \nu^2_2 = \frac{r_2}{r_2 + x} \\
 &\dots\dots\dots(2.9)
 \end{aligned} \right\}$$

が得られる。ただし  $\dot{r}_1 = \partial r_1 / \partial x^1$  である。

もし特定形状のシエル、例えば円錐シエルの場合は  $r_1 = \infty$  となるので式 (2.9) において

$$\begin{aligned}
 h^1_1 &= h_{11} = h^1_{1,1} = 0, \quad h^2_{2,1} = \frac{1}{r_2^2} \cot \phi \\
 \mu^1_1 &= \nu^1_1 = 1
 \end{aligned}$$

となる。また円筒シエルでは  $\phi = \pi/2, r_1 = \infty$  となるので式 (2.7) および式 (2.8) は

$$\begin{aligned}
 a_{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r_2^2 \end{bmatrix}, \quad a^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/r_2^2 \end{bmatrix} \\
 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

となり、式 (2.9) において

$$\begin{aligned}
 h^1_1 &= h_{11} = h^1_{1,1} = 0, \quad h_{22} = -r_2, \quad h^2_{2,1} = 0 \\
 \mu^1_1 &= \nu^1_1 = 1
 \end{aligned}$$

となる。また球シエルでは  $r_1 = r_2 = r$  で一定となるので式 (2.9) において

$$\begin{aligned}
 h^1_{1,1} &= 0, \quad h^2_{2,1} = 0, \quad h^1_1 = h^2_2 \\
 \mu^1_1 &= \mu^2_2, \quad \nu^1_1 = \nu^2_2
 \end{aligned}$$

となる。

(2) 微分方程式

レオロジ-方程式 (1.19)~式 (1.22) においてこの場合共変微分係数は

$$\left. \begin{aligned}
 d_{1;i} &= d_{1,1}, \quad d_{2;i} = d_{2,2} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} d_1 \\
 d_{1;\dot{2}} &= d_{1,2} - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} d_2, \quad d_{2;i} = d_{2,1} - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} d_2 \\
 w_{,1;i} &= w_{,11}, \quad w_{,1;\dot{2}} = w_{,22} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} w_{,2} \\
 w_{,1;\dot{2}} &= w_{,2;i} = w_{,12} - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} w_{,2} \\
 (h^1_1 d_1)_{;i} &= h^1_1 d_{1,1} + h^1_{1,1} d_1 \\
 (h^2_2 d_2)_{;\dot{2}} &= h^2_2 d_{2,2} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} h^1_1 d_1 \\
 (h^1_1 d_1)_{;\dot{2}} &= h^1_1 d_{1,2} - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} h^2_2 d_2 \\
 (h^2_2 d_2)_{;i} &= h^2_2 d_{2,1} + \left( h^2_{2,1} - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} h^2_2 d_2 \right)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.10)$$

となるから

$$\left. \begin{aligned}
 n^{11} &= DA^{1111} (d_{1,1} - h_{11} w) \\
 &+ DA^{1122} \left( d_{2;\dot{2}} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} d_1 - h_{22} w \right) \\
 &+ KA^{1111} (h^1_1 - h^2_2) \\
 &\cdot (-h^1_{1,1} d_1 - w_{,11} - h^1_1 h_{11} w)
 \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 n^{22} &= DA^{2222} \left( d_{2,2} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} d_1 - h_{22} \tau w \right) \\
 &\quad + DA^{2211} (d_{1,1} - h_{11} \tau w) \\
 &\quad + KA^{2222} (h^2_2 - h^1_1) \left[ (h^1_1 - h^2_2) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} d_1 \right. \\
 &\quad \left. - w_{,22} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} w_{,1} - h^2_2 h_{22} \tau w \right] \\
 n^{12} &= D \frac{A^{1212}}{2} \left( d_{1,2} + d_{2,1} - 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} d_2 \right) \\
 &\quad + K \frac{A^{1212}}{2} (h^2_2 - h^1_1) \left[ (h^2_2 - h^1_1) d_{2,1} \right. \\
 &\quad + \left( h^2_{2,1} + (h^1_1 - h^2_2) \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} d_2 \right) \\
 &\quad \left. + w_{,12} - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} w_{,2} \right] \\
 n^{21} &= D \frac{A^{1212}}{2} \left( (d_{1,2} + d_{2,1} - 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} d_2 \right) \\
 &\quad + K \frac{A^{1212}}{2} (h^1_1 - h^2_2) \left[ (h^1_1 - h^2_2) d_{1,2} \right. \\
 &\quad \left. + w_{,12} - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} w_{,2} \right] \dots\dots\dots(2.11)
 \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}
 m^{11} &= -KA^{1111} [h^2_2 d_{1,1} + h^1_1 d_1 \\
 &\quad - (h^2_2 - h^1_1) h_{11} \tau w + w_{,11}] \\
 &\quad - KA^{1122} \left[ h^2_2 d_{2,2} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} h^1_1 d_1 \right. \\
 &\quad \left. + w_{,22} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} w_{,1} \right] \\
 m^{22} &= -KA^{2222} \left[ h^1_1 d_{2,2} + (h^2_2 - 2 h^1_1) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} d_1 \right. \\
 &\quad \left. - (h^1_1 - h^2_2) h_{22} \tau w + w_{,22} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} w_{,1} \right] \\
 &\quad - KA^{2211} [h^1_1 d_{1,1} + h^1_1 d_1 + w_{,11}] \\
 m^{12} &= -K \frac{A^{1212}}{2} \left[ h^1_1 d_{1,2} + (2 h^2_2 - h^1_1) d_{2,1} \right. \\
 &\quad + \left( h^2_{2,2} - (3 h^2_2 - h^1_1) \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} d_2 \right) \\
 &\quad \left. + 2 w_{,12} - 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} w_{,2} \right] \\
 m^{21} &= -K \frac{A^{1212}}{2} \left[ h^2_2 d_{2,1} + (2 h^1_1 - h^2_2) d_{1,2} \right. \\
 &\quad + \left( h^2_{2,1} - (h^2_2 + h^1_1) \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} d_2 \right) \\
 &\quad \left. + 2 w_{,12} - 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} w_{,2} \right] \dots\dots\dots(2.12)
 \end{aligned}$$

となり、上式において

$$\left. \begin{aligned}
 A^{1111} &= (a^{11})^2 = 1 \\
 A^{1122} &= A^{2211} = \nu a^{11} a^{22} = \frac{\nu}{r^2 \sin^2 \phi}
 \end{aligned} \right\} \dots(2.13)$$

$$\left. \begin{aligned}
 A^{2222} &= (a^{22})^2 = \frac{1}{r_2^4 \sin^4 \phi} \\
 A^{1212} &= (1-\nu) a^{11} a^{22} = \frac{1-\nu}{r_2^2 \sin^2 \phi}
 \end{aligned} \right\}$$

となる。また平衡方程式 (1.28) はクリストッフエルの記号が式 (1.8) だけであることを考慮すれば

$$\left. \begin{aligned}
 n^{11}_{,1} + n^{21}_{,2} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} n^{11} \\
 + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} n^{22} - h^1_1 q^1 + p^1 &= 0 \\
 n^{12}_{,1} + n^{22}_{,2} + 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} n^{12} \\
 + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} n^{21} - h^2_2 q^2 + p^2 &= 0 \\
 h_{11} n^{11} + h_{22} n^{22} + q^1_{,1} + q^2_{,2} \\
 + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} q^1 + p^3 &= 0 \\
 m^{11}_{,1} + m^{21}_{,2} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} m^{11} \\
 + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} m^{22} - q^1 + \tilde{m}^1 &= 0 \\
 m^{12}_{,1} + m^{22}_{,2} + 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} m^{12} \\
 + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} m^{21} - q^2 + \tilde{m}^2 &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots(2.14)$$

となる。

また温度変化の影響を考える場合は式 (1.29) より

$$\left. \begin{aligned}
 t_{(1)} &= n^{11}(T) = -(1+\nu) a^{11} [DT_0 - Kh^2_2 \Delta t] \varepsilon \\
 t_{(2)} &= n^{22}(T) = -(1+\nu) a^{22} [DT_0 - Kh^1_1 \Delta t] \varepsilon \\
 \tilde{t}_{(1)} &= m^{11}(T) = -(1+\nu) a^{11} K [-h^2_2 T_0 + \Delta t] \varepsilon \\
 \tilde{t}_{(2)} &= m^{22}(T) = -(1+\nu) a^{22} K [-h^1_1 T_0 + \Delta t] \varepsilon
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.15)$$

とおき、これをレオロジー方程式の  $n^{11}, n^{22}, m^{11}$  および  $m^{22}$  に荷重項として追加すればよい。

以上によって、任意回転シエルの厳密な曲げ理論による微分方程式は式 (2.11)、式 (2.12) および式 (2.14) の計 13 個の連立方程式となり、これを解けば 13 個の未知量  $n^{11}, n^{22}, n^{12}, n^{21}, m^{11}, m^{22}, m^{12}, m^{21}, q^1, q^2, d_1, d_2$ , および  $w$  を求めることができる。しかしこれを理論的に解くことは困難であるから次に述べる数値解析法を用いるのがよい。回転シエルの解析にテンソル解析を応用した文献としては Green & Zerna<sup>9)</sup>, Basar<sup>10)</sup> などがあるが、これらはいずれもシエルの厚さ方向における曲面の骨組みの変化に関係する式 (1.5) の変換係数を  $\mu^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$  とおくことによりこれを無視して積分を行う近似法であるから、レオロジー式では式 (2.11) の合応力に対して曲げ剛度係数  $K$  の項を欠くほか全体として簡略化され、したがって  $n^{12} = n^{21}$  および  $m^{12} = m^{21}$

となっており，温度変化の影響も簡略式となるなどの近似解法となっている。

(3) 数値解法

まず式 (2.11)，式 (2.12) に温度変化の項を追加したものおよび式 (2.13) を整理して次のように書くものとする。ただし  $x^1$  による偏微分係数は記号  $\cdot$  をつけて表わす。

$$\left. \begin{aligned}
 n^{11} &= a^{11}d_1 + a^{12}d_{2,2} + a^{13}\dot{d}_1 + a^{14}w + a^{15}\ddot{w} + t_{(1)} \\
 n^{22} &= a^{21}d_1 + a^{22}d_{2,2} + a^{23}\dot{d}_1 + a^{24}w + a^{25}w_{,22} \\
 &\quad + a^{26}\dot{w} + t_{(2)} \\
 n^{12} &= a^{31}d_{1,2} + a^{32}d_2 + a^{33}\dot{d}_2 + a^{34}w_{,2} + a^{35}\dot{w}_{,2} \\
 n^{21} &= a^{41}d_{1,2} + a^{42}d_2 + a^{43}\dot{d}_2 + a^{44}w_{,2} + a^{45}\dot{w}_{,2} \\
 m^{11} &= a^{51}d_1 + a^{52}d_{2,2} + a^{53}\dot{d}_1 + a^{54}w + a^{55}w_{,22} \\
 &\quad + a^{56}\ddot{w} + a^{57}\dot{w} + \bar{t}_{(1)} \\
 m^{22} &= a^{61}d_1 + a^{62}d_{2,2} + a^{63}\dot{d}_1 + a^{64}w + a^{65}w_{,22} \\
 &\quad + a^{66}\ddot{w} + a^{67}\dot{w} + \bar{t}_{(2)} \\
 m^{12} &= a^{71}d_{1,2} + a^{72}d_2 + a^{73}\dot{d}_2 + a^{74}w_{,2} + a^{75}\dot{w}_{,2} \\
 m^{21} &= a^{81}d_{1,2} + a^{82}d_2 + a^{83}\dot{d}_2 + a^{84}w_{,2} + a^{85}\dot{w}_{,2} \\
 b^{11}n^{11} + b^{12}n^{22} + n^{21}_{,2} + \dot{n}^{11} + b^{13}q^1 + p^1 &= 0 \\
 b^{21}n^{12} + b^{22}n^{21} + n^{22}_{,2} + \dot{n}^{12} + b^{23}q^2 + p^2 &= 0 \\
 b^{31}n^{11} + b^{32}n^{22} + b^{33}q^1 + \dot{q}^1 + q^2_{,2} + p^3 &= 0 \\
 b^{41}m^{11} + b^{42}m^{22} + m^{21}_{,2} + \dot{m}^{11} - q^1 + \bar{m}^1 &= 0 \\
 b^{51}m^{12} + b^{52}m^{21} + m^{22}_{,2} + \dot{m}^{12} - q^2 + \bar{m}^2 &= 0 \\
 &\dots\dots\dots (2.16)
 \end{aligned} \right\}$$

および上式の係数は

$$\left. \begin{aligned}
 a^{11} &= -DA^{1122} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} + KA^{1111}(h^2_2 - h^1_1)h^1_{1,2} \\
 a^{12} &= DA^{1122} \\
 a^{13} &= DA^{1111} \\
 a^{14} &= -DA^{1111}h_{11} - DA^{1122}h_{22} \\
 &\quad + KA^{1111}(h^2_2 - h^1_1)h^1_1h_{11} \\
 a^{15} &= KA^{1111}(h^2_2 - h^1_1) \\
 a^{21} &= -DA^{2222} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} - KA^{2222}(h^2_2 - h^1_1)^2 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \\
 a^{22} &= DA^{2222} \\
 a^{23} &= DA^{1122} \\
 a^{24} &= -DA^{1122}h_{11} - DA^{2222}h_{22} \\
 &\quad - KA^{2222}(h^2_2 - h^1_1)h^2_2h_{22} \\
 a^{25} &= -KA^{2222}(h^2_2 - h^1_1) \\
 a^{26} &= KA^{2222}(h^2_2 - h^1_1) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \\
 a^{31} &= D \frac{A^{1212}}{2} \\
 a^{32} &= -DA^{1212} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} + K \frac{A^{1212}}{2} \left[ (h^2_2 - h^1_1)h_{22,1} \right. \\
 &\quad \left. - (h^2_2 - h^1_1)^2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right]
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 a^{33} &= D \frac{A^{1212}}{2} + K \frac{A^{1212}}{2} (h^2_2 - h^1_1)^2 \\
 a^{34} &= -K \frac{A^{1212}}{2} (h^2_2 - h^1_1) \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \\
 a^{35} &= K \frac{A^{1212}}{2} (h^2_2 - h^1_1) \\
 a^{41} &= D \frac{A^{1212}}{2} + K \frac{A^{1212}}{2} (h^2_2 - h^1_1)^2 \\
 a^{42} &= -DA^{1212} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \\
 a^{43} &= D \frac{A^{1212}}{2} \\
 a^{44} &= K \frac{A^{1212}}{2} (h^2_2 - h^1_1) \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \\
 a^{45} &= -K \frac{A^{1212}}{2} (h^2_2 - h^1_1) \\
 a^{51} &= -KA^{1111}h_{1,1} + KA^{1122} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} h^1_1 \\
 a^{52} &= KA^{1122}h^2_2 \\
 a^{53} &= -KA^{1111}h^2_2 \\
 a^{54} &= KA^{1111}(h^2_2 - h^1_1)h_{11} \\
 a^{55} &= -KA^{1122} \\
 a^{56} &= -KA^{1111} \\
 a^{57} &= KA^{1122} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \\
 a^{61} &= -KA^{2222}(h^2_2 - 2h^1_1) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} - KA^{1122}h_{1,1} \\
 a^{62} &= -KA^{2222}h^1_1 \\
 a^{63} &= -KA^{1122}h^1_1 \\
 a^{64} &= KA^{2222}(h^2_2 - h^1_1)h_{22} \\
 a^{65} &= -KA^{2222} \\
 a^{66} &= -KA^{1122} \\
 a^{67} &= KA^{2222} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} \\
 a^{71} &= -K \frac{A^{1212}}{2} h^1_1 \\
 a^{72} &= -K \frac{A^{1212}}{2} \left( (h^2_{2,1} - (3h^2_2 - h^1_1)) \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right) \\
 a^{73} &= -K \frac{A^{1212}}{2} (2h^2_2 - h^1_1) \\
 a^{74} &= KA^{1212} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \\
 a^{75} &= -KA^{1212} \\
 a^{81} &= K \frac{A^{1212}}{2} (h^2_2 - 2h^1_1) \\
 a^{82} &= -K \frac{A^{1212}}{2} \left( h^2_{2,1} - (h^1_1 + h^2_2) \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} \right) \\
 a^{83} &= -K \frac{A^{1212}}{2} h^2_2 \\
 a^{84} &= KA^{1212} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\}
 \end{aligned} \right\}$$



$$\begin{aligned}
 a^{85} &= -KA^{1212} \\
 b^{11} &= \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix}, \quad b^{12} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{Bmatrix}, \quad b^{13} = -h^1_1 \\
 b^{21} &= 2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix}, \quad b^{22} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix}, \quad b^{23} = -h^2_2 \\
 b^{31} &= h_{11}, \quad b^{32} = h_{22}, \quad b^{33} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix} \\
 b^{41} &= \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix}, \quad b^{42} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{Bmatrix} \\
 b^{51} &= 2 \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix}, \quad b^{52} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{2.17}$$

次に未知数および荷重項をフーリエの級数に展開し、各項は  $x^1 = s$  のみの関数の項と  $x^2 = \theta$  のみの関数の項と積の形にして次のように表わすものとする。

$$\begin{aligned}
 n^{11} &= \sum_{n=0}^{\infty} n^{11}_n \cos n\theta, & n^{12} &= \sum_{n=0}^{\infty} n^{12}_n \sin n\theta \\
 n^{22} &= \sum_{n=0}^{\infty} n^{22}_n \cos n\theta, & n^{21} &= \sum_{n=0}^{\infty} n^{21}_n \sin n\theta \\
 q^1 &= \sum_{n=0}^{\infty} q^1_n \cos n\theta, & q^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} q^2_n \sin n\theta \\
 m^{11} &= \sum_{n=0}^{\infty} m^{11}_n \cos n\theta, & m^{12} &= \sum_{n=0}^{\infty} m^{12}_n \sin n\theta \\
 m^{22} &= \sum_{n=0}^{\infty} m^{22}_n \cos n\theta, & m^{21} &= \sum_{n=0}^{\infty} m^{21}_n \sin n\theta \\
 d_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} d_{1n} \cos n\theta, & d_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n} \sin n\theta \\
 w &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n \cos n\theta
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
 p^1 &= \sum_{n=0}^{\infty} p^1_n \cos n\theta, & p^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} p^2_n \sin n\theta \\
 p^3 &= \sum_{n=0}^{\infty} p^3_n \cos n\theta \\
 \tilde{m}^1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{m}^1_n \cos n\theta, & \tilde{m}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{m}^2_n \sin n\theta \\
 t_{(1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} t_{(1)n} \cos n\theta, & t_{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} t_{(2)n} \cos n\theta \\
 \tilde{t}_{(1)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{t}_{(1)n} \cos n\theta, & \tilde{t}_{(2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{t}_{(2)n} \cos n\theta
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

式 (2.18) および式 (2.19) を式 (2.16) に代入すれば  $n$  の各値について次のようになる。

$$\begin{aligned}
 n^{11}_n &= a^{11}d_{1n} + na^{12}d_{2n} + a^{13}\dot{d}_{1n} + a^{14}w_n \\
 &\quad + a^{15}\dot{w}_n + t_{(1)n} \\
 n^{22}_n &= a^{11}d_{1n} + na^{22}d_{2n} + a^{23}\dot{d}_{1n} + a^{24}w_n \\
 &\quad - n^2a^{25}w_n + a^{26}\dot{w}_n + t_{(2)n} \\
 n^{12}_n &= -na^{31}d_{1n} + a^{32}d_{2n} + a^{33}\dot{d}_{2n} - na^{34}w_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &-na^{35}\dot{w}_n \\
 n^{21}_n &= -na^{41}d_{1n} + a^{42}d_{2n} + a^{43}\dot{d}_{2n} - na^{44}w_n \\
 &\quad - na^{45}\dot{w}_n \\
 m^{11}_n &= a^{51}d_{1n} + na^{52}d_{2n} + a^{53}\dot{d}_{1n} + a^{54}w_n \\
 &\quad - n^2a^{55}w_n + a^{56}\dot{w}_n + a^{57}\dot{w}_n + \tilde{t}_{(2)n} \\
 m^{22}_n &= a^{61}d_{1n} + na^{62}d_{2n} + a^{63}\dot{d}_{1n} + a^{64}w_n \\
 &\quad - n^2a^{65}w_n + a^{66}\dot{w}_n + a^{67}\dot{w}_n + \tilde{t}_{(2)n} \\
 m^{12}_n &= -na^{71}d_{1n} + a^{72}d_{2n} + a^{73}\dot{d}_{2n} - na^{74}w_n \\
 &\quad - na^{75}\dot{w}_n \\
 m^{21}_n &= -na^{81}d_{1n} + a^{82}d_{2n} + a^{83}\dot{d}_{2n} - na^{84}w_n \\
 &\quad - na^{85}\dot{w}_n \\
 b^{11}n^{11}_n + b^{12}n^{22}_n + nn^{21}_n + \tilde{n}^{11}_n + b^{13}q^1_n + p^1_n &= 0 \\
 b^{21}n^{12}_n + b^{22}n^{21}_n - nn^{22}_n + \tilde{n}^{12}_n + b^{23}q^2_n + p^2_n &= 0 \\
 b^{31}n^{11}_n + b^{32}n^{22}_n + b^{33}q^1 + \dot{q}^1_n + nq^2_n + p^3_n &= 0 \\
 b^{41}m^{11}_n + b^{42}m^{22}_n + nm^{21}_n + \dot{m}^{11}_n - q^1_n + \tilde{m}^1_n &= 0 \\
 b^{51}m^{12}_n + b^{52}m^{21}_n - nm^{22}_n + \dot{m}^{12}_n - q^2_n + \tilde{m}^2_n &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.20}$$

さらに、図-4 に示すように、子午線に沿ってこれを  $N$  等分して

$$h = \Delta x^1 = \Delta s$$

とおいて得られる  $(N+1)$  個の格点に対して差分法を用いて式 (2.20) における、 $x^1$  による微分係数の項を消去するものとする。すなわち一般に  $x^1$  の関数を  $F$  とすれば差分法により

中間格点  $i=1, 2, \dots, N-1$  に対し

$$\begin{aligned}
 \dot{F}_{(i)} &= \frac{F_{(i-1)} - F_{(i+1)}}{2h} \\
 \ddot{F}_{(i)} &= \frac{F_{(i+1)} - 2F_{(i)} + F_{(i-1)}}{h^2}
 \end{aligned}$$

格点 0 に対し

$$\begin{aligned}
 \dot{F}_{(0)} &= \frac{F_{(1)} - F_{(0)}}{h} \\
 \ddot{F}_{(0)} &= \frac{F_{(2)} - 2F_{(1)} + F_{(0)}}{h^2}
 \end{aligned}$$

格点  $N$  に対し

$$\begin{aligned}
 \dot{F}_{(N)} &= \frac{F_{(N)} - F_{(N-1)}}{h} \\
 \ddot{F}_{(N)} &= \frac{F_{(N)} - 2F_{(N-1)} + F_{(N-2)}}{h^2}
 \end{aligned}$$

であるから、これを式 (2.20) に適用すれば次の行列方程式

中間格点

$$\beta_{(i)rm} Y_{(i+1)}^m + \alpha_{(i)rs} X_{(i)}^s + \tau_{(i)rm} Y_{(i-1)}^m + P_{(i)r} = 0 \tag{2.21}$$

格点 0

$$\alpha_{(0)rs} X_{(0)}^s + \beta_{(0)rm} Y_{(1)}^m + \lambda_{(0)r} w_{n(2)} + P_{(0)r} = 0 \tag{2.22}$$

格点  $N$

$$\alpha_{(N)rs} X^s_{(N)} + \beta_{(N)rm} Y^m_{(N-1)} + \lambda_{(N)r} w_{n(N-2)} + P_{(N)r} = 0 \dots\dots\dots(2.23)$$

が得られる。ただし上式において

$$i=1, 2, \dots, (N-1)$$

$$r, s=1, 2, \dots, 13$$

$$m=1, 2, \dots, 8$$

で各行列は次のようになる。すなわちまず

$$X^s_{(i)} = \begin{pmatrix} n^{11}_{n(i)} \\ n^{22}_{n(i)} \\ n^{12}_{n(i)} \\ n^{21}_{n(i)} \\ m^{11}_{n(i)} \\ m^{22}_{n(i)} \\ m^{12}_{n(i)} \\ m^{21}_{n(i)} \\ q^1_{n(i)} \\ q^2_{n(i)} \\ d_{1n(i)} \\ d_{2n(i)} \\ w_{n(i)} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.24)$$

$$Y_{(i)}^m = \begin{pmatrix} n^{11}_{n(i)} \\ m^{12}_{n(i)} \\ m^{11}_{n(i)} \\ m^{12}_{n(i)} \\ q^1_{n(i)} \\ d_{1n(i)} \\ d_{2n(i)} \\ w_{n(i)} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.25)$$

$$P_{(i)r} = \begin{pmatrix} t_{(i)n(i)} \\ t_{(2)n(i)} \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{t}_{(1)n(i)} \\ \tilde{t}_{(2)n(i)} \\ 0 \\ 0 \\ p^1_{n(i)} \\ p^2_{n(i)} \\ p^3_{n(i)} \\ \tilde{m}^1_{n(i)} \\ \tilde{m}^2_{n(i)} \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.26)$$

で、式 (2.22) および式 (2.23) における  $X^s, Y^m$  および  $P_r$  もこれに準ずるものとする。また係数の行列は式 (2.27)~式 (2.34) となる。以上により、式 (2.21)、式 (2.22) および式 (2.23) は  $(N+1) \times 13$  元の連立方程式となり、これを  $n=0, 1, 2, \dots$  の各値について解き、収れんするまで行うことになるが、例えば  $N=10$  の場合は 143 元の連立方程式を解く必要がある。もし使用するコンピューターの性能などの理由から少しでも元数を減少したい場合には、境界条件に関係をもたない未知数である  $n^{22}, n^{21}, m^{22}, m^{21}$  および  $q^2$  を式 (2.20) からあらかじめ消しておくのがよい。これにより  $(N+1) \times 5$  だけ元数を減少することができる。

$$\alpha_{(i)rs} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{11} & na^{12} & a^{14} - \frac{2a^{15}}{h^2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{21} & na^{22} & a^{24} - n^2 a^{25} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -na^{31} & a^{32} & -na^{34} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -na^{41} & a^{42} & -na^{44} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{51} & na^{52} & a^{54} - n^2 a^{55} - \frac{2a^{56}}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{61} & na^{62} & a^{64} - n^2 a^{65} - \frac{2a^{66}}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -na^{71} & a^{72} & -na^{74} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -na^{81} & a^{82} & -na^{84} \\ b^{11} & b^{12} & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n & b^{21} & b^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{23} & 0 & 0 & 0 \\ b^{31} & b^{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{33} & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^{41} & b^{42} & 0 & n & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & b^{51} & b^{52} & 0 & - & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.27)$$

$$\beta_{(i)rm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{13}}{2h} & 0 & \frac{a^{15}}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{23}}{2h} & 0 & \frac{a^{26}}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{33}}{2h} & -\frac{na^{35}}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{43}}{2h} & -\frac{na^{45}}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{53}}{2h} & 0 & \frac{a^{56}}{h^2} + \frac{a^{57}}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{63}}{2h} & 0 & \frac{a^{66}}{h^2} + \frac{a^{67}}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{73}}{2h} & -\frac{na^{75}}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{83}}{2h} & -\frac{na^{85}}{2h} \\ \frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots (2.28)$$

$$\gamma_{(i)rm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{13}}{2h} & 0 & \frac{a^{15}}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{23}}{2h} & 0 & -\frac{a^{26}}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{33}}{2h} & \frac{na^{35}}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{43}}{2h} & \frac{na^{45}}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{53}}{2h} & 0 & \frac{a^{56}}{h^2} - \frac{a^{57}}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{63}}{2h} & 0 & \frac{a^{66}}{h^2} - \frac{a^{67}}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{73}}{2h} & \frac{na^{75}}{2h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{83}}{2h} & \frac{na^{85}}{2h} \\ -\frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots (2.29)$$

$$\alpha_{(0)rs} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{11} - \frac{a^{13}}{h} & na^{12} & a^{14} + \frac{a^{15}}{h^2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{21} - \frac{a^{23}}{h} & na^{22} & a^{24} - n^2 a^{25} - \frac{a^{26}}{h} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -na^{31} & a^{32} - \frac{a^{33}}{h} & -na^{34} + \frac{na^{35}}{h} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -na^{41} & a^{42} - \frac{a^{43}}{h} & -na^{44} + \frac{na^{45}}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{51} - \frac{a^{53}}{h} & na^{52} & a^{54} - n^2 a^{55} + \frac{a^{56}}{h^2} - \frac{a^{57}}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{61} - \frac{a^{63}}{h} & na^{62} & a^{64} - n^2 a^{65} + \frac{a^{66}}{h^2} - \frac{a^{67}}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -na^{71} & a^{72} - \frac{a^{73}}{h} & -na^{74} + \frac{na^{75}}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -na^{81} & a^{82} - \frac{a^{83}}{h} & -na^{84} + \frac{na^{85}}{h} \\ b^{11} - \frac{1}{h} & b^{12} & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -n & b^{21} - \frac{1}{h} & b^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b^{31} & b^{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{33} - \frac{1}{h} & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b^{41} - \frac{1}{h} & b^{42} & 0 & n & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & b^{51} - \frac{1}{h} & b^{52} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.....(2.30)

$$\beta_{(0)rm} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{13}}{h} & 0 & -\frac{2a^{15}}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{23}}{h} & 0 & \frac{a^{26}}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{33}}{h} & -\frac{na^{35}}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{43}}{h} & -\frac{na^{45}}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{53}}{h} & 0 & -\frac{2a^{56}}{h^2} + \frac{a^{57}}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{63}}{h} & 0 & -\frac{2a^{66}}{h^2} + \frac{a^{67}}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{73}}{h} & -\frac{na^{75}}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a^{83}}{h} & -\frac{na^{85}}{h} \\ \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.....(2.31)

$$\alpha_{(N)rs} = \begin{pmatrix}
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{11} + \frac{a^{13}}{h} & na^{12} & a^{14} + \frac{a^{15}}{h^2} \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{21} + \frac{a^{23}}{h} & na^{22} & a^{24} - n^2 a^{25} + \frac{a^{26}}{h} \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -na^{31} & a^{32} + \frac{a^{33}}{h} & -na^{34} - \frac{na^{35}}{h} \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -na^{41} & a^{42} + \frac{a^{43}}{h} & -na^{44} - \frac{na^{45}}{h} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{51} + \frac{a^{53}}{h} & na^{52} & a^{54} - n^2 a^{55} + \frac{a^{56}}{h^2} + \frac{a^{57}}{h} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & a^{61} + \frac{a^{63}}{h} & na^{62} & a^{64} - n^2 a^{65} + \frac{a^{66}}{h^2} + \frac{a^{67}}{h} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -na^{71} & a^{72} + \frac{a^{73}}{h} & -na^{74} - \frac{na^{75}}{h} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -na^{81} & a^{82} + \frac{a^{83}}{h} & -na^{84} - \frac{na^{85}}{h} \\
 b^{11} + \frac{1}{h} & b^{12} & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -n & b^{21} + \frac{1}{h} & b^{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{23} & 0 & 0 & 0 \\
 b^{31} & b^{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^{33} + \frac{1}{h} & n & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & b^{41} + \frac{1}{h} & b^{42} & 0 & n & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & b^{51} + \frac{1}{h} & b^{52} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

.....(2.32)

$$\beta_{(N)rm} = \begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{13}}{h} & 0 & -\frac{2a^{15}}{h^2} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{23}}{h} & 0 & -\frac{a^{26}}{h} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{33}}{h} & \frac{na^{35}}{h} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{43}}{h} & \frac{na^{45}}{h} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{53}}{h} & 0 & -\frac{2a^{56}}{h^2} - \frac{a^{57}}{h} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{63}}{h} & 0 & -\frac{2a^{66}}{h^2} - \frac{a^{67}}{h} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{73}}{h} & \frac{na^{75}}{h} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{a^{83}}{h} & \frac{na^{85}}{h} \\
 -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{h} & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix}$$

.....(2.33)

$$\lambda_{(0)r} \text{ OR } \lambda_{(N)r} = \begin{pmatrix} \frac{a^{15}}{h^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{a^{56}}{h^2} \\ \frac{a^{66}}{h^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(2.34)$$

(4) 物理的成分

前項の数値解法によって得られる未知量はテンソル量であって、すべて  $S_0$  面の骨組み、すなわち基本ベクトルに関する成分として表わされているから実用的にはこれを単位ベクトルに関する成分として表わす必要がある。これを物理的成分といい  $\hat{n}^{11}, \hat{n}^{22}, \text{etc.}$  のように上へをつけて表わすが、さらにいま、これを大文字を用いて  $N_s, N_\theta, \text{etc.}$  のように表わすものとすれば次のようになる (文献 1), p. 54~)。

$$\left. \begin{aligned} N_s &= \hat{n}^{11} = a_{11} n^{11} \\ N_\theta &= \hat{n}^{22} = a_{22} n^{22} \\ N_{s\theta} &= \hat{n}^{12} = \sqrt{a_{11} a_{22}} n^{12} \\ N_{\theta s} &= \hat{n}^{21} = \sqrt{a_{11} a_{22}} n^{21} \\ M_s &= \hat{m}^{11} = a_{11} m^{11} \\ M_\theta &= \hat{m}^{22} = a_{22} m^{22} \\ Q_s &= \hat{q}^1 = \sqrt{a_{11}} q^1 \\ Q_\theta &= \hat{q}^2 = \sqrt{a_{22}} q^2 \\ U &= \hat{d}_1 = \sqrt{a^{11}} d_1 \\ V &= \hat{d}_2 = \sqrt{a^{22}} d_2 \\ W &= \hat{w} = w \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.35)$$

この場合、計量テンソルは式 (2.7) により

$$a_{11} = a^{11} = 1 \quad a_{22} = 1/a^{22} = r_2^2 \sin^2 \phi$$

である。また数値解法で求めた未知量  $n^{11}, \text{etc.}$  はすべて  $p^1, \text{etc.}$  の荷重項を係数として表わされているから、これらも物理的成分に換算する必要があるが、これについては次式を用いる。すなわちいま荷重項の物理的成分を

$$\begin{aligned} P_s &= \hat{p}^1, & P_\theta &= \hat{p}^2, & P_x &= \hat{p}^3, \\ \tilde{M}_s &= \hat{m}^1, & \tilde{M}_\theta &= \hat{m}^2 \end{aligned}$$

とおけば

$$\left. \begin{aligned} p^1 &= \sqrt{a^{11}} P_s & p^2 &= \sqrt{a^{22}} P_\theta & p^3 &= P_x \\ \tilde{m}^1 &= \sqrt{a^{11}} \tilde{M}_s & \tilde{m}^2 &= \sqrt{a^{22}} \tilde{M}_\theta \end{aligned} \right\}$$

である。すでに述べたように、 $\tilde{M}_s$  および  $\tilde{M}_\theta$  は小さいので一般に無視することが多い。また温度変化の影響の項は式 (2.25) により与えられるが、これは物理的成分となっているので、そのままよい。

3. 任意非回転シェル

縦軸に直角な断面が、図-6 に示すように円以外の形をもつとき、そのシェルを非回転シェルと呼ぶことにする。ただし  $S_0$  面の子午線は任意の一定の曲線とする。したがって、前述の断面は縦軸方向の位置にかかわらず相似的形状をもつことになる。このようなシェルの場

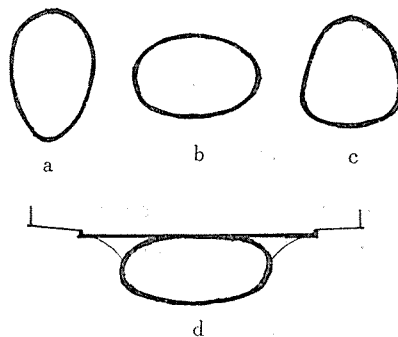


図-6 非回転シェル

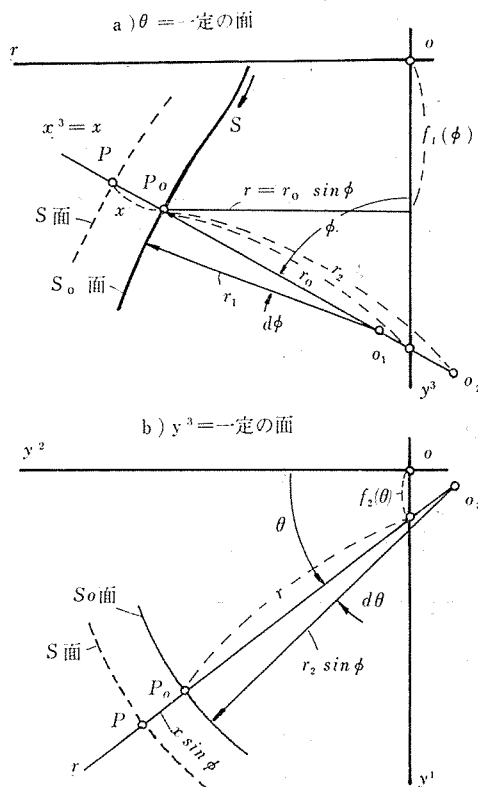


図-7

合は、回転シエルの場合の図-5 は図-7 のようになる。この両者の違いは、 $S_0$  面上の任意の点  $P_0$  における主曲率中心  $O_2$  が  $O_1$  と同様に、一般には  $y^3$  軸上に存在しないことである。しかしこの場合も、 $x^1$  座標を

$$x^1=s, \quad x^2=\theta, \quad x^3=x$$

とすれば  $S$  面上の  $P$  点に関し

$$\left. \begin{aligned} y^1 &= (r_0+x)\sin\phi\sin\theta+f_2(\theta) \\ y^2 &= (r_0+x)\sin\phi\cos\theta \\ y^3 &= f_1(\phi)-x\cos\phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1)$$

が成立し、これは式 (2.1) と類似の形をしていることがわかる。ただし  $r_0, f_1$  および  $f_2$  は図に示すとおりで、このうち  $r_0$  は  $P_0$  における  $S_0$  面の法線上で  $y^3$  軸との間にはさむ長さを示し、 $f_2$  は新しく導入されたものである。これらの間には幾何学的に次の関係が成立つ。

$$\left. \begin{aligned} f_{1,2} &= 0, \quad f_{2,1} = 0 \\ (r_0\sin\phi)_{,1} &= \frac{\partial r}{\partial s} = \cos\phi \\ f_{1,1} &= \frac{\partial f_1}{\partial s} = \sin\phi \\ (r_0\sin\phi\sin\theta+f_2)_{,2} &= r_2\sin\phi\cos\theta \\ (r_0\sin\phi\cos\theta)_{,2} &= -r_2\sin\phi\sin\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.2)$$

および

$$\left. \begin{aligned} (r_2\sin\phi)_{,1} &= m\cos\phi \\ r_{2,1} &= \frac{mr_1-r_2}{r_1}\cot\phi \\ \left(\frac{1}{r_2}\right)_{,1} &= -\frac{mr_1-r_2}{r_1r_2^2}\cot\phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.3)$$

式 (3.3) における  $m$  は、シエルの形が与えられれば  $s$  の変化に伴う  $r_2\sin\phi$  の変化を図上で求めることにより数値的に決めることができる。式 (3.2) を用いて  $S$  面の基本ベクトルおよび相反基本ベクトルの成分を求めると

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= [(1+x/r_1)\cos\phi\sin\theta, (1+x/r_1)\cos\phi\cos\theta, (1+x/r_1)\sin\phi] \\ \mathbf{r}_2 &= [(r_2+x)\sin\phi\cos\theta, -(r_2+x)\sin\phi\sin\theta, 0] \\ \mathbf{r}_3 &= (\sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta, -\cos\phi) \\ \mathbf{r}^1 &= \left(\frac{\cos\phi\sin\theta}{1+x/r_1}, \frac{\cos\phi\cos\theta}{1+x/r_1}, \frac{\sin\phi}{1+x/r_1}\right) \\ \mathbf{r}^2 &= \left(\frac{\cos\theta}{(r_2+x)\sin\phi}, \frac{-\sin\theta}{(r_2+x)\sin\phi}, 0\right) \\ \mathbf{r}^3 &= \mathbf{r}_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.4)$$

となって、回転シエルの場合の式 (2.3) および式 (2.5) と同形となることがわかる。したがって  $S_0$  面に関する  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$  も式 (2.6) と同じであり、計

量テンソル式 (2.4) および式 (2.7) もそのまま適用される。しかし

$$a_{11,1} = a_{11,2} = 0$$

は同じであるが、

$$a_{22,1} = 2mr_2\sin\phi\cos\phi,$$

$$a_{22,2} = 2r_2^*r_2\sin^2\phi, \quad r_2^* = r_{2,2} = \partial r_2 / \partial \theta$$

となるからクリストッフエルの記号のうち 0 とならないのは

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= -mr_2\sin\phi\cos\phi, \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{m}{r_2}\cot\phi, \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{a_{22,2}}{2a_{22}} = \frac{r_2^*}{r_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.5)$$

となって、回転シエルの場合に比し、 $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\}$  が追加されることになる。また式 (2.9) はこの場合

$$\left. \begin{aligned} h^1_{11} &= -\frac{1}{r_1}, \quad h^2_{22} = -\frac{1}{r_2} \\ h_{11} &= -\frac{1}{r_1}, \quad h_{22} = -r_2\sin^2\phi \\ h^1_{1,1} &= \frac{\dot{r}_1}{r_1^2}, \quad h^1_{1,2} = 0 \\ h^2_{2,1} &= \frac{mr_1-r_2}{r_1r_2^2}\cot\phi, \\ h^2_{2,2} &= \frac{r_2^*}{r_2^2} = -h^2_{22} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} \\ \mu^1_{11} &= \frac{r_1+x}{r_1}, \quad \mu^2_{22} = \frac{r_2+x}{r_2} \\ \nu^1_{11} &= \frac{r_1}{r_1+x}, \quad \nu^2_{22} = \frac{r_2}{r_2+x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6)$$

となって、異なるのは  $h^1_{1,1}$  と  $h^2_{2,2}$  だけである。したがって、式 (2.10) の共変微分係数はこの場合次に示すものだけが異なり、その他は同じである。

$$\left. \begin{aligned} d_{2,2}{}_{;2} &= d_{2,2} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} d_1 - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} d_2 \\ w_{2,2}{}_{;2} &= w_{2,2} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} w_{,1} - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} w_{,2} \\ (h^2_2 d_2)_{;2} &= h^2_2 d_{2,2} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} h^1_{1,1} d_1 - 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} h^2_2 d_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.7)$$

式 (3.7) および式 (2.10) を用いると式 (1.19)~式 (1.22) より次のレオロジー方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} n^{11} &= DA^{1111}(d_{1,1}-h_{11}w) + DA^{1122} \\ &\quad \cdot \left( d_{2,2} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} d_1 - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} d_2 - h_{22}w \right) \\ &\quad - KA^{1111}(h^1_1-h^2_2)(h_{11,1}d_1+w_{,11}+h^1_1h_{11}w) \\ n^{22} &= DA^{2222} \left( d_{2,2} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\} d_1 - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix} \right\} d_2 - h_{22}w \right) \\ &\quad + DA^{2211}(d_{1,1}-h_{11}w) + KA^{2222}(h^2_2-h^1_1) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & \cdot \left[ (h^1_1 - h^2_2) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} d_1 + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} h^2_2 d_2 - w_{,22} \right. \\
 & \left. + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} w_{,1} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} w_{,2} - h^2_2 h_{22} w \right] \\
 m^{11} &= -KA^{1111} [h^2_2 d_{1,1} + h^1_{1,1} d_1 - (h^2_2 - h^1_1) h_{11} w \\
 & + w_{,11}] - KA^{1122} \left[ h^2_2 d_{2,2} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} h^1_1 d_1 \right. \\
 & \left. - 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} h^2_2 d_2 + w_{,22} - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} w_{,1} - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} w_{,2} \right] \\
 m^{22} &= -KA^{2222} \left[ h^1_1 d_{2,2} + (h^2_2 - 2h^1_1) \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} d_1 \right. \\
 & \left. - (h^1_1 + h^2_2) \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} d_2 - (h^1_1 - h^2_2) h_{22} w + w_{,22} \right. \\
 & \left. - \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} w_{,1} - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} w_{,2} \right] \\
 & - KA^{2211} [h^1_1 d_{1,1} + h^1_{1,1} + w_{,11}] \\
 n^{12}, n^{21}, m^{12}, m^{21} & \text{は (2.11), (2.12) に同じ} \\
 & \dots\dots\dots(3.8)
 \end{aligned} \right\}$$

また平衡方程式は式 (1.28) においてクリストッフエルの記号が式 (3.5) により  $\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\}$  が 0 とならないので次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 n^{11}_{,1} + n^{21}_{,2} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} n^{11} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} n^{21} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} n^{22} \\
 - h^1_1 q^1 + p^1 &= 0 \\
 n^{12}_{,1} + n^{22}_{,2} + 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} n^{12} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} n^{21} + 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} n^{22} \\
 - h^2_2 q^2 + p^2 &= 0 \\
 h_{11} n^{11} + h_{22} n^{22} + q^1_{,1} + q^2_{,2} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} q^1 + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} q^2 \\
 + p^3 &= 0 \\
 m^{11}_{,1} + m^{21}_{,2} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} m^{11} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} m^{21} \\
 + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} m^{22} - q^1 + \tilde{m}^1 &= 0 \\
 m^{12}_{,1} + m^{22}_{,2} + 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} m^{12} + \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \ 2 \end{matrix} \right\} m^{21} \\
 + 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} m^{22} - q^2 + \tilde{m}^2 &= 0 \\
 & \dots\dots\dots(3.9)
 \end{aligned} \right\}$$

しかし温度変化の影響については式 (2.15) をそのまま用いることができる。したがって、これを考慮に入れたレオロジー方程式 (3.8) と平衡方程式 (3.9) を整理すれば、回転シエルの場合の式 (2.16) の第 1~8 式の右辺を  $[n^{11}]$ ,  $[n^{22}]$ , ..., また第 9~13 式の左辺を  $f_1$ ,  $f_2$ , ... で表わすとき次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 n^{11} &= [n^{11}] + \bar{a}^{11} d_2 \\
 n^{22} &= [n^{22}] + \bar{a}^{21} d_2 + \bar{a}^{22} w_{,2} \\
 n^{12} &= [n^{12}] \\
 n^{21} &= [n^{21}] \\
 m^{11} &= [m^{11}] + \bar{a}^{51} d_2 + \bar{a}^{52} w_{,2} \\
 m^{22} &= [m^{22}] + \bar{a}^{61} d_2 + \bar{a}^{62} w_{,2} \\
 m^{12} &= [m^{12}] \\
 m^{21} &= [m^{21}] \\
 f_1 + \bar{b}^1 n^{21} &= 0 \\
 f_2 + \bar{b}^2 n^{22} &= 0 \\
 f_3 + \bar{b}^3 q^2 &= 0 \\
 f_4 + \bar{b}^4 m^{21} &= 0 \\
 f_5 + \bar{b}^5 m^{22} &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots(3.10)$$

ただし上式における新しい係数は

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{a}^{11} &= -DA^{1122} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} \\
 \bar{a}^{21} &= -DA^{2222} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} - KA^{2222} (h^2_2 - h^1_1) h^2_2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} \\
 \bar{a}^{22} &= KA^{2222} (h^2_2 - h^1_1) \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} \\
 \bar{a}^{51} &= KA^{1122} \cdot 2 h^2_2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} \\
 \bar{a}^{52} &= KA^{1122} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} \\
 \bar{a}^{61} &= KA^{2222} (h^1_1 + h^2_2) \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} \\
 \bar{a}^{62} &= KA^{2222} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} \\
 \bar{b}^1 = \bar{b}^3 = \bar{b}^4 &= \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} \\
 \bar{b}^2 = \bar{b}^5 &= 2 \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2 \ 2 \end{matrix} \right\} \\
 & \dots\dots\dots(3.11)
 \end{aligned} \right\}$$

である。式 (3.10) と回転シエルの場合の式 (2.16) と比較すれば、その違いが少なくしかもはっきりしているので、前と同様の数値解法を用いた場合、回転シエルの場合の諸式をわずかに修正するだけで適用しうることがわかる。

参 考 文 献

- 1) 横道英雄：テンソルとレオロジー，技報堂，1975.
- 2) シエルとテンソル解析，大学院テキスト No. 16, 1976, 北大工，横道研究室.
- 3) A.E. Green & W. Zerna：Theoretical Elasticity, 1968, Oxford Press.
- 4) Y. Basar：Zur Berechnung von Rotationsschalen mit Differenzenverfahren, 1972, Ing. Arch.41, 421-434.