

# 変位法によるコンクリート構造物のクリープ・乾燥収縮解析の基礎理論

佐 藤 素 啓\*  
 渡 辺 実\*  
 佐 藤 昇\*\*

## 1. ま え が き

最近コンクリート斜張橋あるいはアーチ橋のように、コンクリート構造物の大規模化に伴って、構造形式がかなり複雑化し多様化してきた。また施工方法の開発も急速に進展し、多種多様な施工法が考案されている。

このような状況にあつて、設計上常に問題点としてあげられるものに、コンクリートのクリープと乾燥収縮による断面力の変化、あるいは変位量の変化をいかにして実際のものに近く、かつ、実用的に解析するかといった問題がある。そこで第二著者<sup>1)</sup>は H. Trost の理論<sup>9)~12)</sup>と H. Rüsch, D. Jungwirth, H. Hilsdorf のクリープ係数に関する理論<sup>1),2)</sup>に基づいた D. Schade の理論<sup>13)</sup>を基盤にして、分割施工される連続桁橋のクリープによる断面力変化の解析を試みた。これによってかなり実際に解析することができるようになった。しかしながらそこでの解析は応力法によっているため、構造形式ならびに施工方法が固定化されてしまい、実用面において多少不都合さが残っている。

このような応力法の不都合さを解決するためには、任意の構造形式、あるいは施工法に対して汎用性のある変位法を応用することが有効である。また解析プログラムを開発するうえでも有効である。そこで本報告では D. Schade の理論に基づいて、変位法によって、クリープと乾燥収縮による二次的な断面力と変位量を解析する方法について論じることとする。なおここでは、梁部材の曲げたわみあるいは軸方向変位に関する基礎微分方程式から移行式を誘導し、これをさらに変形して一般の変位法における剛性方程式を誘導していく方法をとっている。

## 2. 時間に関係したコンクリートの応力-ひずみ関係

### 2.1 クリープ係数と乾燥収縮度

クリープ係数は H. Rüsch, D. Jungwirth ならびに

\* ピー・エス・コンクリート (株)  
 \*\* パシフィック・コンサルタンツ (株)

H. Hilsdorf らの研究に基づいた最近の提案に従えば、フロー成分と遅れ弾性成分とに分けて次式で与えられる。

$$\varphi(t, \tau) = \varphi_{f_0} [k_f(t) - k_f(\tau)] + 0.4k_v(t - \tau) \dots\dots\dots (1)$$

ここで、

- $\varphi(t, \tau)$ : 材令  $\tau$  で持続荷重が載荷されたときの経過時間  $t$  におけるクリープ係数
- $\varphi_{f_0}$ : 基準フロー値で環境条件とコンクリートのコンシステンシーに関する
- $k_f$ : フロー値の進行度を表わす係数で有効部材厚  $d_w$  と時間  $t$  に関する (図-1 (a))
- $k_v$ : 遅れ弾性値の進行度を表わす係数で持続荷重の載荷後の時間  $(t - \tau)$  に関する (図-1 (b))

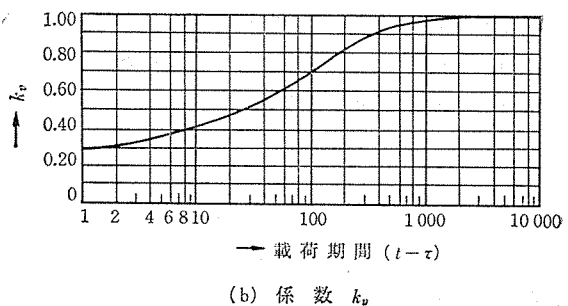
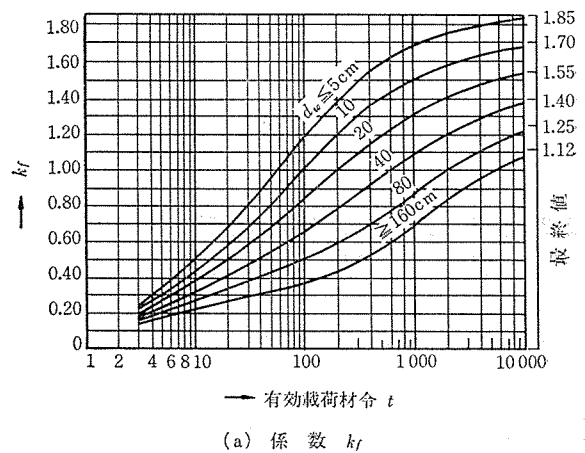


図-1 クリープの進行に関する係数

報 告

である。

また乾燥収縮度についても最近の提案に従えば次式で与えられる。

$$\varepsilon_s(t, \tau_s) = \varepsilon_{s0} [k_s(t) - k_s(\tau_s)] \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

$\varepsilon_s(t, \tau_s)$  : 材令  $\tau_s$  で乾燥収縮の影響を受け始めた時の経過時間  $t$  における乾燥収縮度

$\varepsilon_{s0}$  : 基準乾燥収縮度で環境条件とコンクリートのコンシステンシーに関する

$k_s$  : 乾燥収縮の進行度を表わす係数で有効部材厚  $d_w$  と時間  $t$  に関する (図-2)

である。

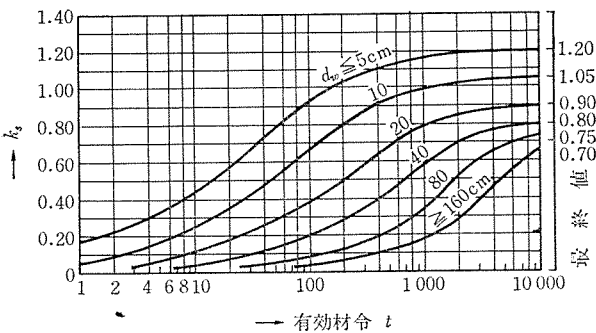


図-2 乾燥収縮の進行に関する係数

なお、このクリープ係数と乾燥収縮度については文献 1) から 8) に詳しく述べられている。

2.2 クリープと乾燥収縮によるひずみ

材令  $\tau$  で持続荷重が載荷されたときの時間  $t$  におけるコンクリートのひずみ  $\varepsilon(t)$  は、持続荷重の載荷による弾性ひずみ  $\varepsilon_e(\tau)$  と時間の経過に伴って発生してくるクリープひずみ  $\varepsilon_k(t)$  ならびに乾燥収縮ひずみ  $\varepsilon_s(t)$  を合計して得られ、

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(\tau) + \varepsilon_k(t) + \varepsilon_s(t) \dots\dots\dots (3)$$

で表わされる。このうちクリープと乾燥収縮によるひずみは、H. Trost の累加原則ならびに D. Schade が与えた材令係数  $\rho(t, \tau)$  を用いて、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ks}(t) &= \varepsilon_k(t) + \varepsilon_s(t) \\ &= \frac{\sigma_e(\tau)}{E_c} \cdot \varphi(t, \tau) + \frac{\sigma_{ks}(t)}{E_c} \\ &= [1 + \rho(t, \tau) \cdot \varphi(t, \tau)] \cdot \varepsilon_s(t, \tau_s) \dots\dots (4) \end{aligned}$$

で表わされる。ここで、

$\varepsilon_{ks}(t)$  : クリープと乾燥収縮によるひずみ

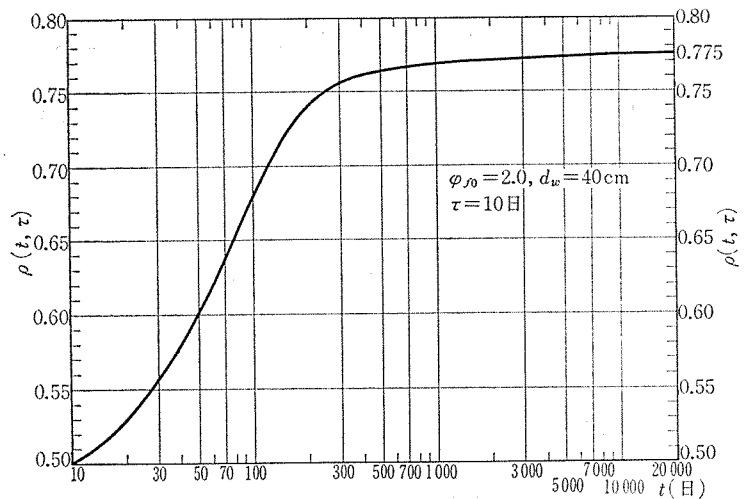


図-3 材令係数

$\sigma_e(\tau)$  : 持続荷重の載荷によって生じた弾性応力度

$\sigma_{ks}(t)$  : クリープと乾燥収縮によって発生した応力度

$E_c$  : コンクリートの弾性係数

である。なお 図-3 に示した材令係数は、著者らが D. Schade の理論に基づいて  $\varphi_{f0} = 2.0$ ,  $d_w = 40$  cm,  $\tau = 10$  日の条件について計算したものである。

(4) 式はさらに、

$$E_\varphi = \frac{E_c}{1 + \rho(t, \tau) \cdot \varphi(t, \tau)} \dots\dots\dots (5)$$

と置くことによって次のような簡単な式で表わすことができる。

$$\varepsilon_{ks}(t) = \frac{\sigma_e(\tau)}{E_\varphi} \cdot \varphi(t, \tau) + \frac{\sigma_{ks}(t)}{E_\varphi} + \varepsilon_s(t, \tau_s) \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $E_\varphi$  をクリープ換算弾性係数と呼ぶことにする。

以上において導かれた(6)式からわかるように、クリープと乾燥収縮によって発生するひずみは、コンクリートの弾性係数  $E_c$  をクリープ換算弾性係数  $E_\varphi$  で置換え、さらに持続荷重の載荷による弾性ひずみにクリープ係数をかけることによって、一般の弾性計算と同じ方法で計算することができる。また乾燥収縮ひずみについては、クリープひずみと独立して取扱うことができることがわかる。

本節ではクリープと乾燥収縮によって生じるひずみを H. Trost の理論, H. Rüschi, D. Jungwirth, H. Hilsdorf らのクリープ係数と乾燥収縮度に関する提案ならびに D. Schade の理論に基づいて、より实际的に計算する基本原理について述べた。以下ではこの基本原理に基づいて、変位法によってクリープと乾燥収縮によって

二次的に発生する変位量と断面力を解析する方法について述べることにする。

### 3. 剛性方程式の誘導

一般の曲げたわみと軸方向変位を有する梁部材の剛性方程式は、まず曲げたわみを有する梁部材と軸方向変位を有する梁部材について、それぞれ別個に剛性方程式を誘導し、その後その両者を合成することによって誘導することができる。

#### 3.1 曲げたわみを有する梁部材

##### (1) 基礎微分方程式

梁部材のクリープによって発生する曲げモーメント  $M_x^\varphi$  とこれに対するたわみ  $y_x^k$  との関係は、(6)式に基づきクリープ換算弾性係数  $E_\varphi$  を用いて次式で表わされる。

$$-E_\varphi I \frac{d^2 y_x^k}{dx^2} = M_x^\varphi \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 $I$  は梁部材の断面二次モーメントである。また図-4 に示した梁部材の微小要素において、 $x$  点にお

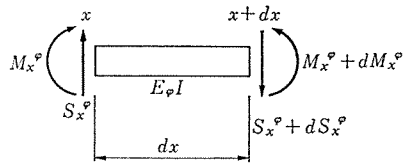


図-4 曲げたわみを有する梁部材の微小要素

ける曲げモーメントの釣合いと鉛直方向の力の釣合い、ならびに(7)式の関係から次のような一連の関係式が得られる。

$$E_\varphi I \frac{d^4 y_x^k}{dx^4} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$-E_\varphi I \frac{d^3 y_x^k}{dx^3} = S_x^\varphi \dots\dots\dots (9)$$

$$\frac{dy_x^k}{dx} = \theta_x^k \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $S_x^\varphi$  と  $\theta_x^k$  はそれぞれ、クリープによって発生するせん断力とたわみ角である。

たわみ  $y_x^k$  に関する4階の微分方程式(8)を基礎微分方程式として、以後剛性方程式を誘導していくことにする。

##### (2) 移行式

基礎微分方程式(8)を順次積分して解くと、

$$y_x^k = C_1 + x \cdot C_2 + \frac{x^2}{2} \cdot C_3 + \frac{x^3}{6} \cdot C_4 \dots\dots\dots (11)$$

となる。ここで、 $C_1, C_2, C_3, C_4$  は積分定数である。また2.2で示したコンクリートの時間に関係した応力-ひずみ関係式(6)から、梁部材の  $x$  点におけるクリープに

よる変位量は、

$$\left. \begin{aligned} y_x^\varphi &= y_x^e \cdot \varphi(t, \tau) + y_x^k \\ \theta_x^\varphi &= \theta_x^e \cdot \varphi(t, \tau) + \theta_x^k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

で表わされる。各記号は次のとおりである。

$y_x^\varphi$  : クリープによって生じるたわみ

$\theta_x^\varphi$  : クリープによって生じるたわみ角

$y_x^e$  : 持続荷重の载荷によって生じる弾性たわみ

$\theta_x^e$  : 持続荷重の载荷によって生じる弾性たわみ角

(7), (9), (10), (11), (12)式からクリープによって生じる変位  $y_x^\varphi, \theta_x^\varphi$  および断面力  $M_x^\varphi, S_x^\varphi$  をマトリックス表示すると、

$$\begin{bmatrix} y_x^\varphi \\ \theta_x^\varphi \\ M_x^\varphi \\ S_x^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{d}{dx} \\ -E_\varphi I \frac{d^2}{dx^2} \\ -E_\varphi I \frac{d^3}{dx^3} \end{bmatrix} \cdot Y_x^k + \varphi(t, \tau) \cdot \begin{bmatrix} y_x^e \\ \theta_x^e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x & \frac{x^2}{2} & \frac{x^3}{6} \\ 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & -E_\varphi I & -E_\varphi I x \\ 0 & 0 & 0 & -E_\varphi I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} + \varphi(t, \tau) \cdot \begin{bmatrix} y_x^e \\ \theta_x^e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

となる。次に  $x=0$  での境界条件から(13)式中の積分定数を求めることにする。 $x=0$  における変位量と断面力を、

$$\begin{bmatrix} y_x^\varphi \\ \theta_x^\varphi \\ M_x^\varphi \\ S_x^\varphi \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} y_0^\varphi \\ \theta_0^\varphi \\ M_0^\varphi \\ S_0^\varphi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_x^e \\ \theta_x^e \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} y_0^e \\ \theta_0^e \end{bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

として(13)式を整理すると、

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{E_\varphi I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{E_\varphi I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0^\varphi \\ \theta_0^\varphi \\ M_0^\varphi \\ S_0^\varphi \end{bmatrix} - \varphi(t, \tau) \cdot \begin{bmatrix} y_0^e \\ \theta_0^e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

となり、積分定数が決定される。さらに (15) 式を (13) 式に代入し、また  $x=l$  とすると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} y_l^\varphi \\ \theta_l^\varphi \\ M_l^\varphi \\ S_l^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l & -\frac{l^2}{2E_\varphi I} & -\frac{l^3}{6E_\varphi I} \\ 0 & 1 & -\frac{l}{E_\varphi I} & -\frac{l^2}{2E_\varphi I} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0^\varphi \\ \theta_0^\varphi \\ M_0^\varphi \\ S_0^\varphi \end{bmatrix} + \varphi(t, \tau) \begin{bmatrix} y_l^e - y_0^e - l \cdot \theta_0^e \\ \theta_l^e - \theta_0^e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

(16) 式は梁部材の左端 ( $x=0$ ) の状態量によって右端 ( $x=l$ ) の状態量を表わす関係式で、これを曲げたわみを有する梁部材の移行式という。

(3) クリープ換算剛性マトリックス

移行式 (16) の左辺と右辺第 1 項から変位法における剛性マトリックスを誘導することにする。まず (16) 式において  $M_l^\varphi$  と  $S_l^\varphi$  ならびに  $M_0^\varphi$  と  $S_0^\varphi$  を入れかえると、

$$\begin{bmatrix} y_l^\varphi \\ \theta_l^\varphi \\ S_l^\varphi \\ M_l^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l & -\frac{l^3}{6E_\varphi I} & -\frac{l^2}{2E_\varphi I} \\ 0 & 1 & -\frac{l^2}{2E_\varphi I} & -\frac{l}{E_\varphi I} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0^\varphi \\ \theta_0^\varphi \\ S_0^\varphi \\ M_0^\varphi \end{bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

となり、これをさらに簡単に次のように表わすことにする。

$$\begin{bmatrix} U_l \\ V_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} U_l \\ V_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_l^\varphi \\ \theta_l^\varphi \\ S_l^\varphi \\ M_l^\varphi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0^\varphi \\ \theta_0^\varphi \\ S_0^\varphi \\ M_0^\varphi \end{bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l^3}{6E_\varphi I} & -\frac{l^2}{2E_\varphi I} \\ -\frac{l^2}{2E_\varphi I} & -\frac{l}{E_\varphi I} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

である。

(18) 式を部材両端の断面力  $[V_0]$  と  $[V_l]$  について整理すると、

$$\begin{bmatrix} V_0 \\ V_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12}^{-1}a_{11} & a_{12}^{-1} \\ -a_{22}a_{12}^{-1}a_{11} & a_{22}a_{12}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_l \end{bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

となり、マトリックスの各要素を求めて整理すると (23)

式が得られる。

$$\begin{bmatrix} a_{12}^{-1} \\ -a_{12}^{-1}a_{11} \\ -a_{22}a_{12}^{-1}a_{11} \\ a_{22}a_{12}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12E_\varphi I}{l^3} & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} \\ -\frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{2E_\varphi I}{l} \\ \frac{12E_\varphi I}{l^3} & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} \\ \frac{6E_\varphi I}{l^2} & -\frac{4E_\varphi I}{l} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

$$\begin{bmatrix} S_0^\varphi \\ M_0^\varphi \\ S_l^\varphi \\ M_l^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12E_\varphi I}{l^3} & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{12E_\varphi I}{l^3} & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} \\ \frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{4E_\varphi I}{l} & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{2E_\varphi I}{l} \\ -\frac{12E_\varphi I}{l^3} & \frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{12E_\varphi I}{l^3} & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} \\ -\frac{6E_\varphi I}{l^2} & -\frac{2E_\varphi I}{l} & \frac{6E_\varphi I}{l^2} & -\frac{4E_\varphi I}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0^\varphi \\ \theta_0^\varphi \\ y_l^\varphi \\ \theta_l^\varphi \end{bmatrix} \dots\dots\dots (23)$$

ここで (23) 式は、断面力の正の方向を 図-5 (a) に示した方向にとって誘導されたものであるが、変位法で

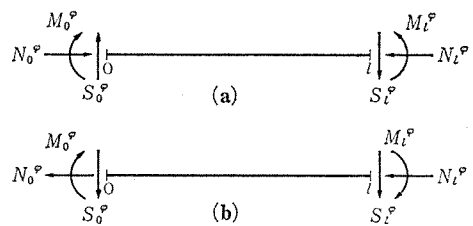


図-5 断面力の符号変換

は断面力の作用方向を統一しておく必要がある。そこで 図-5 (b) の方向に統一させるために (23) 式の符号変換を行うことにする。なお持続荷重の荷重方向についても、断面力の作用方向と同一方向に統一しておくことにする。

図-5 の (a) と (b) の符号の関係から、 $S_0^\varphi$  ならび  $M_l^\varphi$  について剛性マトリックスの符号変換を行うと

$$[K^c] = \begin{bmatrix} \frac{12E_\varphi I}{l^3} & \frac{6E_\varphi I}{l^2} & -\frac{12E_\varphi I}{l^3} & \frac{6E_\varphi I}{l^2} \\ \frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{4E_\varphi I}{l} & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{2E_\varphi I}{l} \\ -\frac{12E_\varphi I}{l^3} & \frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{12E_\varphi I}{l^3} & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} \\ \frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{2E_\varphi I}{l} & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{4E_\varphi I}{l} \end{bmatrix} \quad (24)$$

となる。これを曲げたわみを有する梁部材のクリープ換算剛性マトリックスと呼ぶことにする。

(4) クリープ換算等価節点力

移行式 (16) において、右辺の第 2 項を

$$\varphi(t, \tau) \cdot \begin{bmatrix} y_l^e - y_0^e - l \cdot \theta_0^e \\ \theta_l^e - \theta_0^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^\varphi \\ \theta^\varphi \end{bmatrix} = [P] \quad \dots\dots\dots (25)$$

と置き、これに対する部材両端の等価節点力を

$$\begin{bmatrix} S_0^\varphi \\ M_0^\varphi \end{bmatrix}_f = [F_0], \quad \begin{bmatrix} S_l^\varphi \\ M_l^\varphi \end{bmatrix}_f = [F_l] \quad \dots\dots\dots (26)$$

として部材両端の変位を拘束すると次式が得られる。ここで (26) 式において添字  $f$  は等価節点力であることを示す。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ F_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (27)$$

これを  $[F_0]$  と  $[F_l]$  について整理すると、

$$\begin{bmatrix} F_0 \\ F_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{12}^{-1} & 0 \\ -a_{22} \cdot a_{12}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (28)$$

となり、(28) 式に (22) 式と (25) 式ならびに (26) 式を代入し、さらに等価節点力に対する符号の統一を行うと次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} S_0^\varphi \\ M_0^\varphi \\ S_l^\varphi \\ M_l^\varphi \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} \frac{12E_\varphi I}{l^3} & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} \\ \frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{2E_\varphi I}{l} \\ -\frac{12E_\varphi I}{l^3} & \frac{6E_\varphi I}{l^2} \\ \frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{4E_\varphi I}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y^\varphi \\ \theta^\varphi \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (29)$$

これを曲げたわみを有する梁部材のクリープ換算等価節点力と呼ぶことにする。

3.2 軸方向変位を有する梁部材

(1) 基礎微分方程式

梁部材のクリープによって発生する軸方向力  $N_x^\varphi$  と、これに対する軸方向変位  $u_x^k$  との関係は、(6) 式に基づきクリープ換算弾性係数  $E_\varphi$  を用いて次式で表わされる。

$$E_\varphi A \frac{du_x^k}{dx} = N_x^\varphi \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここで、 $A$  は梁部材の断面積である。また 図-6 に示し

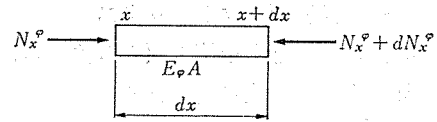


図-6 軸方向変位を有する梁部材の微小要素

た梁部材の微小要素において、軸方向の力の釣合いから、

$$\frac{dN_x^\varphi}{dx} = 0 \quad \dots\dots\dots (31)$$

が得られる。さらに (30) 式と (31) 式との関係から次のような軸方向変位  $u_x^k$  に関する 2 階の基礎微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2 u_x^k}{dx^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

(2) 移行式

基礎微分方程式 (32) を順次積分して解くと、

$$u_x^k = C_1 + x \cdot C_2 \quad \dots\dots\dots (33)$$

となる。ここで  $C_1$  と  $C_2$  は積分定数である。また (6) 式の関係から、梁部材の  $x$  点におけるクリープによる軸方向変位  $u_x^\varphi$  は (12) 式と同様に、

$$u_x^\varphi = u_x^e \cdot \varphi(t, \tau) + u_x^k \quad \dots\dots\dots (34)$$

で表わされる。ここで  $u_x^e$  は持続荷重の载荷によって生じた弾性的な軸方向変位量である。

(30), (33), (34) 式からクリープによって生じる変位  $u_x^\varphi$  と軸方向力  $N_x^\varphi$  をマトリックス表示すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} u_x^\varphi \\ N_x^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ E_\varphi A \frac{d}{dx} \end{bmatrix} u_x^k + \varphi(t, \tau) \cdot \begin{bmatrix} u_x^e \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & E_\varphi A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} + \varphi(t, \tau) \begin{bmatrix} u_x^e \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

次に  $x=0$  での境界条件から (35) 式中の積分定数を求めることにする。 $x=0$  での変位量と軸方向力を、

$$\begin{bmatrix} u_x^\varphi \\ N_x^\varphi \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} u_0^\varphi \\ N_0^\varphi \end{bmatrix}, \quad u^e_{x=0} = u_0^e \quad \dots\dots\dots (36)$$

として (35) 式を整理すると、積分定数は次のように決定される。

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{E_\varphi A} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} U_0^\varphi \\ N_0^\varphi \end{bmatrix} - \varphi(t, \tau) \begin{bmatrix} U_0^e \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \dots\dots\dots (37)$$

さらに (37) 式を (35) 式に代入し、 $x=l$  とすることによって次のような軸方向変位を有する梁部材の移行式が得られる。

$$\begin{bmatrix} u_l^\varphi \\ N_l^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0^\varphi \\ N_0^\varphi \end{bmatrix} + \varphi(t, \tau) \cdot \begin{bmatrix} u_l^e - u_0^e \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (38)$$

(3) クリープ換算剛性マトリックス

移行式 (38) の左辺と右辺第 1 項の関係から、軸方向力について整理すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} N_0^\varphi \\ N_l^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{E_\varphi A}{l} & \frac{E_\varphi A}{l} \\ -\frac{E_\varphi A}{l} & \frac{E_\varphi A}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0^\varphi \\ u_l^\varphi \end{bmatrix} \dots\dots\dots(39)$$

ここで、曲げたわみを有する梁部材の場合と同様に、図-5 (b) に示した方向に軸方向力の作用方向を統一しておく必要がある。すなわち  $N_0^\varphi$  について剛性マトリックスの符号変換を行うと、

$$[K^\varphi] = \begin{bmatrix} \frac{E_\varphi A}{l} & -\frac{E_\varphi A}{l} \\ -\frac{E_\varphi A}{l} & \frac{E_\varphi A}{l} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(40)$$

となり、軸方向変位を有する梁部材のクリープ換算剛性マトリックスが得られる。

(4) クリープ換算等価節点力

移行式 (38) において、右辺の第 2 項を

$$\varphi(t, \tau) \cdot (u_l^e - u_0^e) = u^\varphi \dots\dots\dots(41)$$

と置き、部材両端の変位を拘束すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ N_0^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{l}{E_\varphi A} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ N_0^\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u^\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots(42)$$

ここで添字  $f$  は等価節点力であることを示す。(42) 式をさらに  $N_0^\varphi$  と  $N_l^\varphi$  について整理し、また軸方向力に対する符号の統一を行うと、軸方向変位を有する梁部材のクリープ換算等価節点力が得られる。

$$\begin{bmatrix} N_0^\varphi \\ N_l^\varphi \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} \frac{E_\varphi A}{l} \\ -\frac{E_\varphi A}{l} \end{bmatrix} u^\varphi \dots\dots\dots(43)$$

3.3 曲げたわみと軸方向変位を有する梁部材

曲げたわみと軸方向変位を有する梁部材のクリープ換算剛性マトリックスとクリープ換算等価節点力は、3.1 で誘導された曲げたわみを有する梁部材に対するものと、3.2 で誘導された軸方向変位を有する梁部材に対す

$$\begin{bmatrix} N_0^\varphi \\ S_0^\varphi \\ M_0^\varphi \\ N_l^\varphi \\ S_l^\varphi \\ M_l^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_\varphi A}{l} & 0 & 0 & -\frac{E_\varphi A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_\varphi I}{l^3} & \frac{6E_\varphi I}{l^2} & 0 & -\frac{12E_\varphi I}{l^3} & \frac{6E_\varphi I}{l^2} \\ 0 & \frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{4E_\varphi I}{l} & 0 & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{2E_\varphi I}{l} \\ -\frac{E_\varphi A}{l} & 0 & 0 & \frac{E_\varphi A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_\varphi I}{l^3} & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} & 0 & \frac{12E_\varphi I}{l^3} & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} \\ 0 & \frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{2E_\varphi I}{l} & 0 & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} & \frac{4E_\varphi I}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0^\varphi \\ y_0^\varphi \\ \theta_0^\varphi \\ u_l^\varphi \\ y_l^\varphi \\ \theta_l^\varphi \end{bmatrix} \dots\dots\dots(44)$$

るものとを合成することによって誘導される。

すなわちクリープ換算剛性マトリックスは (24) 式と (40) 式とを合成して得られ、部材両端に作用する断面力と変位量とを対応させると、(44) 式のようになる。

同様に、クリープ換算等価節点力は (29) 式と (43) 式とを合成して得られ、

$$\begin{bmatrix} N_0^\varphi \\ S_0^\varphi \\ M_0^\varphi \\ N_l^\varphi \\ S_l^\varphi \\ M_l^\varphi \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} \frac{E_\varphi A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_\varphi I}{l^3} & -\frac{6E_\varphi I}{l^2} \\ 0 & \frac{6E_\varphi I}{l^2} & -\frac{2E_\varphi I}{l} \\ -\frac{E_\varphi A}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_\varphi I}{l^3} & \frac{6E_\varphi I}{l^2} \\ 0 & \frac{6E_\varphi I}{l^2} & -\frac{4E_\varphi I}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u^\varphi \\ y^\varphi \\ \theta^\varphi \end{bmatrix} \dots\dots(45)$$

となる。ここで前記したように、

$$\left. \begin{aligned} u^\varphi &= \varphi(t, \tau) \cdot (u_0^e) \\ y^\varphi &= \varphi(t, \tau) \cdot (y_l^e - y_0^e - l \cdot \theta_0^e) \\ \theta^\varphi &= \varphi(t, \tau) \cdot (\theta_l^e - \theta_0^e) \end{aligned} \right\} \dots\dots(46)$$

である。

3.4 乾燥収縮に対するクリープ換算等価節点力

乾燥収縮によるひずみは、(6) 式の関係からわかるように、クリープによるひずみとは独立して取扱うことができるので、以上までの説明ではクリープによるひずみのみを考えてきた。ここでは乾燥収縮ひずみに対するクリープ換算等価節点力を誘導することにする。

軸方向変位が拘束された部材に乾燥収縮度  $\epsilon_s(t, \tau_s)$  が生じたとき、部材端に作用する軸方向力は符号を統一すると次式で与えられる。

$$\begin{bmatrix} N_0^\epsilon \\ N_l^\epsilon \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} E_\varphi A \\ -E_\varphi A \end{bmatrix} \cdot \epsilon_s(t, \tau_s) \dots\dots\dots(47)$$

ここで、左辺の添字  $\epsilon$  は乾燥収縮ひずみに対する等価節点力であることを示す。さらに (47) 式と (43) 式あ

るいは (45) 式とを合成すれば、乾燥収縮をも考慮に入れたクリープ換算等価節点力が得られる。すなわち、(43) 式あるいは (45) 式における  $w^e$  を (41) 式と (47) 式との関係から、

$$u^e = \varphi(t, \tau) \cdot (u_1^e - u_0^e) + l \cdot \varepsilon_s(t, \tau_s) \dots (48)$$

とすればよい。

以上、2 節と 3 節では変位法によるコンクリート構造物のクリープ・乾燥収縮解析法の基礎理論について説明した。この基礎理論をより具体的に説明するために、次に手計算で計算できる程度の簡単な計算例を示すことにする。

#### 4. 計算例

図-7 に示した、先端が単純支承された片持ち梁について、クリープによって生じる支点反力を求めることに

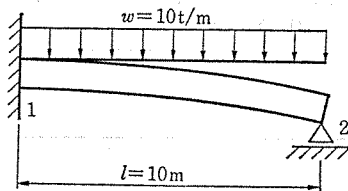


図-7 計算例

する。なお片持ち梁状態に施工し、材令  $\tau=10$  日で持続荷重  $w=10$  t/m を作用させ、弾性的に変位ならびに断面力が生じた後に先端を単純支承するものとする。梁の断面二次モーメントは  $I=1$  m<sup>4</sup> とし、弾性係数は計算の便宜上  $E_c=1$  t/m<sup>2</sup> とする。また基準フロー値は  $\varphi_{f0}=2.0$ 、有効部材厚は  $d_w=40$  cm とする。

##### ①弾性解析

節点 2 における弾性変位量を計算すると、

$$y_1^e = 0, \theta_1^e = 0$$

$$y_2^e = \frac{wl^4}{8E_c I} = \frac{10 \times 10^4}{8 \times 1 \times 1} = 12500$$

$$\theta_2^e = \frac{wl^3}{6E_c I} = \frac{10 \times 10^3}{6 \times 1 \times 1} = 1666.7$$

となる。

##### ②クリープ解析

クリープ係数ならびに材令係数は、(1) 式と 図-1、図-3 から、

$$\varphi(t_\infty, 10) = 2.0 \times (1.40 - 0.32) + 0.4 \times 1.0 = 2.56$$

$$\rho(t_\infty, 10) = 0.775$$

クリープ換算弾性係数は、(5) 式から、

$$E_\varphi = \frac{1}{1 + 0.775 \times 2.56} = 0.3351, E_\varphi I = 0.3351$$

クリープ換算等価節点力を (25) 式と (29) 式から求める。

$$y^e = \varphi(t_\infty, 10) \cdot (y_2^e - y_1^e - l \cdot \theta_1^e)$$

$$= 2.56 \times (12500 - 0 - 0) = 32000$$

$$\theta^e = \varphi(t_\infty, 10) \cdot (\theta_2^e - \theta_1^e)$$

$$= 2.56 \times (1666.7 - 0) = 4267$$

$$\begin{bmatrix} S_2^e \\ M_2^e \end{bmatrix}_f = \begin{bmatrix} -\frac{12E_\varphi I}{l^3} & \frac{6E_\varphi I}{l^2} \\ \frac{6E_\varphi I}{l^2} & -\frac{4E_\varphi I}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^e \\ \theta^e \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.004021 & 0.02011 \\ 0.02011 & -0.1340 \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 32000 \\ 4267 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42.86 \\ 71.74 \end{bmatrix}$$

剛性方程式から節点 2 のクリープによる回転変位を求めると、

$$\frac{4E_\varphi I}{l} \cdot \theta_2^e + M_{2f}^e = 0$$

$$\theta_2^e = -\frac{71.74 \times 10}{4 \times 0.3351} = -535.2$$

クリープによって生じる節点 2 のせん断力は、

$$S_2^e = -\frac{6E_\varphi I}{l^2} \cdot \theta_2^e + S_{2f}^e$$

$$= -\frac{6 \times 0.3351}{10^2} \times (-535.2) - 42.86 = -32.1 \text{ t}$$

したがってクリープによって生じる支点反力は、

$$R_2^e = -S_2^e = 32.1 \text{ t}$$

となる。

#### 5. あとがき

本報告では変位法によって、コンクリート構造物のクリープと乾燥収縮による二次的な挙動の解析を試みた。文献 14) で論じられた応力法による解析では、クリープ換算性状係数とクリープ換算荷重項の概念が導入されたが、変位法による解析ではクリープ換算剛性マトリックスとクリープ換算等価節点力の概念が導入されている。これによって時間に従属したクリープ・乾燥収縮問題を時間と独立した形で解析することを可能にした。

変位法は大次元の連立方程式を解く必要があり、電子計算機による解析が不可欠であるものの汎用性に富んでいる。したがって各種の構造形式に対して、あるいは分割施工によって各施工段階ごとに構造系が変化する構造物などに対して有効な解析方法である。近年、構造ならびに施工法の大型化・複雑化が進んできた土木構造物のみならず、建築構造物についても、その応用が期待されるのである。

本報告で論じた基礎理論が、各分野におけるクリープと乾燥収縮問題の研究者・実務者にとって、多少なりとも参考になれば幸甚である。

参 考 文 献

- 1) H. Rüsç, D. Jungwirth, H. Hilsdorf: Kritische Sichtung der Verfahren zur Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden des Betons auf das Verhalten der Tragwerke, Beton-und Stahlbetonbau, Heft 3・4・6, 1973
- 2) H. Rüsç, D. Jungwirth: Stahlbeton-Spannbeton Band 2., Werner-Verlag, 1976  
百島祐信訳: コンクリート構造物のクリープと乾燥収縮, 鹿島出版会
- 3) 百島祐信訳: ドイツのプレストレストコンクリート設計・施工指針 (DIN 4227 の臨時代替案), コンクリート工学, Vol. 14, No. 10, 1976
- 4) Beton-Kalender Teil II, 1976, Wilhelm Ernst & Sohn
- 5) 猪股俊司: プレストレストコンクリートに対するクリープの影響, プレストレストコンクリート, Vol. 18, No. 2, 1976
- 6) 猪股俊司: クリープ問題における回復クリープ成分無視の影響, コンクリート工学, Vol. 15, No. 1, 1977
- 7) 日本道路協会: 道路橋示方書・コンクリート橋編, 昭和53年1月
- 8) 土木学会: プレストレストコンクリート標準示方書, 昭和53年制定
- 9) H. Trost: Auswirkungen des Superpositionsprinzips auf Kriech-und Relaxationsprobleme bei Beton und Spannbeton, Beton-und Stahlbetonbau, Heft 10・11, 1967
- 10) H. Trost, H.-J. Wolff: Zur wirklichkeitsnahen Ermittlung der Beanspruchungen in abschnittsweise hergestellten Spannbetontragwerken, Der Bauingenieur, Heft 5, 1970
- 11) H. Trost, B. Mainz: Zur Auswirkung von Zwängungen in Spannbetontragwerken, Beton-und Stahlbetonbau, Heft 8, 1970
- 12) H. Trost: Folgerungen aus Theorien und Versuchen für die baupraktische Untersuchung von Kriech-und Relaxationsproblemen in Spannbetontragwerken, Vorbericht Zum IVBH Symposium, 1970
- 13) D. Schade: Alterungsbeiwerte für das Kriechen von Beton nach den Spannbetonrichtlinien, Beton-und Stahlbetonbau, Heft 5, 1977  
若狭忠雄訳: プレストレストコンクリート指針によるコンクリートのクリープに対する変化係数について, プレストレストコンクリート, Vol. 21, No. 5, 1979
- 14) 山家馨, 渡辺実: 分割施工される PC 連続桁橋の遅れ弾性を考慮したクリープ解析法, プレストレストコンクリート, Vol. 21, No. 5, 1979

【昭和55年3月13日受付】

◀刊行物案内▶

## プレストレストコンクリート世界の動向と 新道路橋示方書による設計計算例

本書は第7回技術講習会のためのテキストです。その内容は、前半は世界におけるPCの動向として、諸外国の特殊なPC橋施工例 Alm 橋ほか数橋と LNG タンクについて、また建築構造物については最近世界的に関心の高まってきたアンボンド PC 工法をとりあげ、その理論と利用法について詳しく説明されている。後半には新しいコンクリート道路橋示方書に基づいた設計計算例として、静定構造物についてはポストテンション単純Tげた橋について、また不静定構造物については連続げた橋について詳細折込付図を添付し詳述されている。実務者には必携の図書としてお勧めいたします。希望者は代金を添えプレストレストコンクリート技術協会にお申し込みください。

体 裁: A4判

定 価: 3,000 円 送 料: 400 円

内 容: プレストレストコンクリート世界の動向——(A) 土木構造物——Alm 橋, Ruck-A-Chucky 橋, Columbia 斜張橋, Brotonne 橋, Carpinto橋, Fos-sur-Mer, Montori-en-Bretagne の各 LNG タンクほか, (B) 建築構造物——アンボンド PC 工法の発達の歴史, アンボンド PC 鋼材と防せい材, アンボンド PC 部材の曲げひびわれおよび曲げ破壊耐力, 曲げひびわれおよびたわみ特性と普通鉄筋の必要性, アンボンド PC 部材の曲げ疲労耐力, フラットスラブ構造, Ⅲ種アンボンド PRC 構造, 新コンクリート道路橋示方書による設計計算例, (C) 静定構造物設計計算例——設計計算の対象, 材料強度・許容応力度等, 曲げモーメントが作用する部材としての設計, せん断力が作用する部材としての設計, (D) 不静定構造物設計計算例——不静定構造物の断面力の算定, 設計条件, 各部の設計ほか, 折込付図4枚