

講座

PC 斜張橋のクリープ解析の基本 (その2)

4 斜張系のクリープ解析の基本

PC 斜張橋のクリープ解析の基本的考え方について、ここでは、まず、前述のケース C) と D) を組み合わせた例について説明する。

説明を簡単にするため、図-7 に示す構造モデルを考える。主桁はコンクリート部材（クリープする部材）、斜材は鋼部材（クリープしない部材）とし、持続荷重には主桁の自重 w を考える。

更に、主桁を張出し架設し、その後斜材を設置し、斜張系を完成させることとする。

第3章の(5)式を誘導した場合と同様に、A点のたわみの釣合いについて考えると、斜張系の場合は、桁橋系に斜材のバネ効果を加えればよいことになる。

したがって、斜張系モデルにおける弾性方程式は次式となる。

$$X_1 \delta_{11G} d\varphi + dX_1 \delta_{11G} + \delta_{10} d\varphi + dX_1 \delta_{11S} = 0 \dots (12)$$

ここに、 X_1 : 時刻 t 時に斜材に生じている不静定力

δ_{11G} : クリープする主桁の X_1 方向の単位荷重

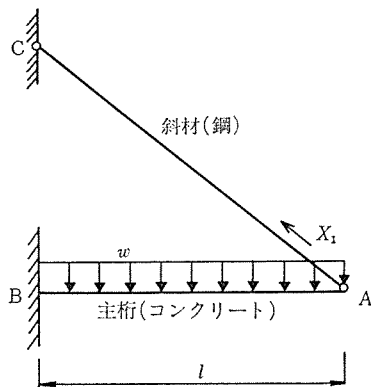


図-7 斜張系の構造モデル

によるたわみ

dX_1 : 時間 dt 間に斜材に生じるクリープによる不静定力

δ_{10} : 持続荷重による X_1 方向のたわみ

δ_{11S} : 斜材の X_1 方向の単位荷重によるたわみ、すなわち、斜材のバネ定数

(12) 式は更に次のようにまとめることができる。

$$(\delta_{11G} + \delta_{11S}) dX_1 + (X_1 \delta_{11G} + \delta_{10}) d\varphi = 0$$

両辺を δ_{11G} で除すと、

$$\left(1 + \frac{\delta_{11S}}{\delta_{11G}}\right) dX_1 + \left(X_1 + \frac{\delta_{10}}{\delta_{11G}}\right) d\varphi = 0$$

ここで、 $\alpha = 1 + \frac{\delta_{11S}}{\delta_{11G}}$, $X_L = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11G}}$ とおけば、

$$\alpha dX_1 + (X_1 - X_L) d\varphi = 0$$

$$\frac{1}{(X_1 - X_L)} dX_1 = -\frac{1}{\alpha} d\varphi$$

両辺を積分して、

$$X_1 - X_L = C \cdot e^{-\varphi/\alpha} \quad (C : \text{積分定数}) \dots \dots (13)$$

時刻 $t=0$ で、 $\varphi=0$, $X_{1,t=0}=0$ であるため、(13) 式より、

$$C = -X_L$$

したがって、クリープ終了時の斜材張力 $X_{1,t=\infty}$ は次式となる。

$$X_{1,t=\infty} = (1 - e^{-\varphi/\alpha}) X_L \dots \dots \dots (14)$$

いま、第3章で求めた(9)式と(14)式とを比較してみると、 X_L に乗じる係数部分に、クリープしない斜材のバネの効果が含まれている点が、桁橋系と斜張系との基本的な違いであることがわかる。

勿論、(14)式において、バネがないものとする、 $\delta_{11S}=0$, すなわち、 $\alpha=1$ となり、(14)式と(9)式が一致することになる。

さて、ここで図-8 に示す簡単な斜張系の計算モデル

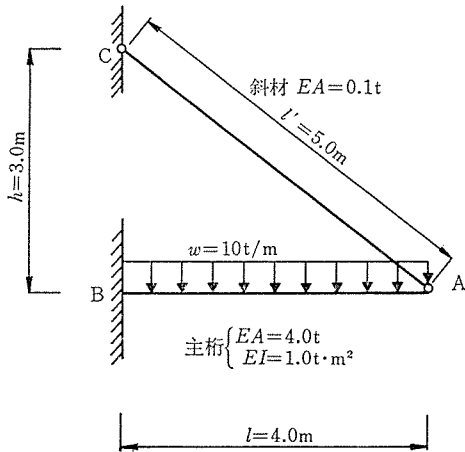


図-8 計算用モデル

を用いて説明する。計算用の諸定数は図中に示したとおりである。

ここでは、まず、第2章で述べたケース C) だけの場合、すなわち、この斜張系を一度に支保工上で製作した場合について、クリープによる斜材張力の変化量を求め、これと対比して、更にケース D) を組み合わせた場合について計算してみることにする。

a) 斜張橋を一度に支保工上で製作した場合

まず、変位係数 δ_{10} , δ_{11G} , δ_{11S} は次のように求まる。

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \int \frac{M_1 M_0}{EI} dx + \int \frac{N_1 N_0}{EA} dx \\ &= -\frac{wl^4}{8EI} \cdot \sin \theta + 0 = -\frac{10.0 \times 4.0^4}{8 \times 1.0} \times \frac{3}{5} \\ &= -192.0 \\ \delta_{11G} &= \int \frac{M_1^2}{EI} dx + \int \frac{N_1^2}{EA} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{l^3}{3EI} \cdot \sin^2 \theta + \frac{l}{EA} \cdot \cos^2 \theta \\ &= \frac{4.0^3}{3 \times 1.0} \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{4.0}{4.0} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 8.32 \\ \delta_{11S} &= \int \frac{N_1^2}{EA} dx = \frac{l'}{EA} = \frac{5.0}{0.1} = 50.0 \end{aligned}$$

ここに、 M_0 , N_0 : 持続荷重による曲げモーメント, 軸力

M_1 , N_1 : 単位荷重が X_1 方向に作用したときの曲げモーメント, 軸力

したがって、全支保工上で一度に斜張系を完成させた場合のクリープ開始前 ($t=0$ 時) の斜材張力 $X_{1,t=0}$ は次のように求まる。

$$\begin{aligned} X_{1,t=0} &= -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\delta_{10}}{(\delta_{11G} + \delta_{11S})} \\ &= -\frac{(-192.0)}{(8.32 + 50.0)} = 3.29 \text{ t} \end{aligned}$$

いま、クリープ係数を $\varphi=1.6$ とすると、クリープによる斜材張力の変化量 ΔX_1 は (13) 式より次のように求まる。

時刻 $t=0$ で、 $\varphi=0$, $X_{1,t=0}=3.29 \text{ t}$ の初期条件と、

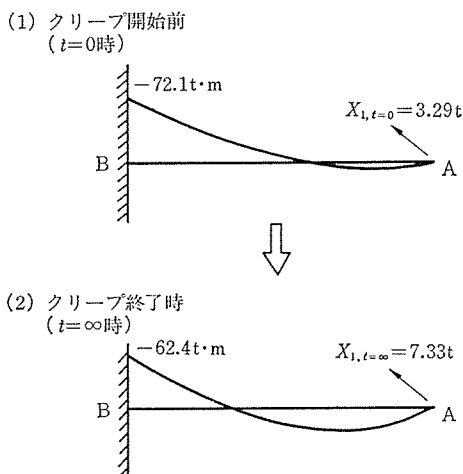
$$\alpha = 1 + \frac{\delta_{11S}}{\delta_{11G}} = 1 + \frac{50.0}{8.32} = 7.01$$

$$X_L = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11G}} = -\frac{(-192.0)}{8.32} = 23.08 \text{ t}$$

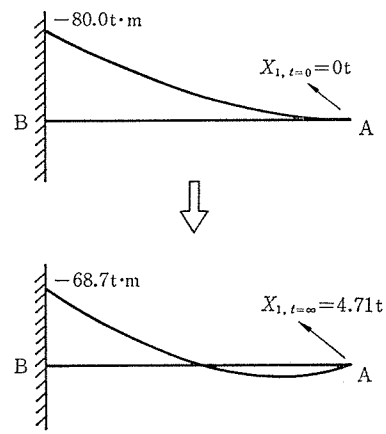
とから、

$$\begin{aligned} C &= (X_{1,t=0} - X_L) \times e^{\varphi/\alpha} \\ &= (3.29 - 23.08) \times e^{(0/7.01)} = -19.79 \text{ t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_{1,t=\infty} &= X_L + C \cdot e^{-\varphi/\alpha} \\ &= 23.08 - 19.79 \times e^{-(1.6/7.01)} = 7.33 \text{ t} \end{aligned}$$



(a) 支保工上で一度に斜張系を完成させた場合 (構造系に変化のない場合)



(b) 主桁を張出し架設後、斜材を設置し、斜張系を完成させた場合 (構造系に変化のある場合)

図-9 計算結果の対比

◇講 座◇

$$\begin{aligned} \therefore \Delta X_1 &= X_{1,t=\infty} - X_{1,t=0} \\ &= 7.33t - 3.29 = 4.04t \end{aligned}$$

このように、斜張系を構成する部材にコンクリートと鋼が混在している場合には、クリープにより全支保工上で製作した場合でも断面力に変化があることがわかる。

b) 構造系に変化のある場合、すなわち、主桁を張出し架設した後に斜材を設置した場合

この場合は、(14)式がそのまま適用できる。

$$\begin{aligned} X_{1,t=\infty} &= (1 - e^{-\varphi/1.6}) X_L \\ &= \{1 - e^{-(1.6/7.01)}\} \times 23.08 = 4.71t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Delta X_1 &= X_{1,t=\infty} - X_{1,t=0} \\ &= 4.71 - 0 = 4.71t \end{aligned}$$

以上の計算例による結果を図-9にまとめて示す。

さて、実際のPC斜張橋は、一般に高次の不静定構造物となるため、図-10に示すようなn次不静定の斜張系を考えると、時刻tから時刻t+Δt間における弾性方程式は、次式のように表わすことができる。

$$\begin{cases} X_1\delta_{11}Gd\varphi + X_2\delta_{12}Gd\varphi + \dots + X_n\delta_{1n}Gd\varphi + dX_1\delta_{11}G \\ + dX_2\delta_{12}G + \dots + dX_n\delta_{1n}G + dX_1\delta_{11}S \\ + dX_2\delta_{12}S + \dots + dX_n\delta_{1n}S + \delta_{10}d\varphi = 0 \\ \dots\dots\dots \\ X_1\delta_{n1}Gd\varphi + X_2\delta_{n2}Gd\varphi + \dots + X_n\delta_{nn}Gd\varphi + dX_1\delta_{n1}G \\ + dX_2\delta_{n2}G + \dots + dX_n\delta_{nn}G + dX_1\delta_{n1}S \\ + dX_2\delta_{n2}S + \dots + dX_n\delta_{nn}S + \delta_{n0}d\varphi = 0 \\ \dots\dots\dots \end{cases} \quad (15)$$

(15)式は、更に次のようにまとめることができる。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n X_i \delta_{ji} G d\varphi + \sum_{i=1}^n dX_i \delta_{ji} G + \sum_{i=1}^n dX_i \delta_{ji} S \\ + \delta_{j0} d\varphi = 0 \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

ここに、dX_i: 時間Δt間に生じるクリープによる不静定力

X_i: 不静定力 (ここでは、時刻tの斜材iの張力)

δ_{ji}G: クリープを起こす部材の点iにX_i=1.0tの単位荷重が作用したときの点j

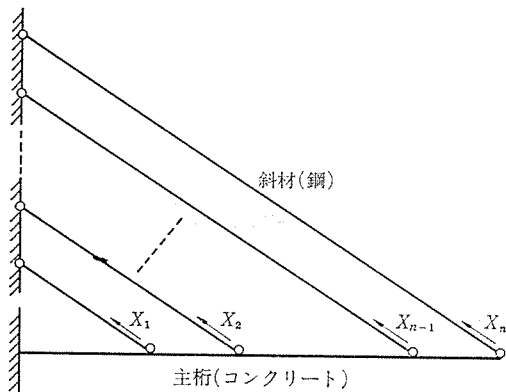


図-10 n次不静定の斜張系構造モデル

の X_j 方向の変位

δ_{j0}: 持続荷重が作用したときの点jのX_j方向の変位

δ_{jis}: 斜材iにX_i=1.0tの単位荷重が作用したときの斜材jのX_j方向の変位 (ただし、i≠jのとき、δ_{jis}=0)

dφ: 時間Δt間のクリープ係数

(16)式の第2項と第3項をまとめ、両辺をdφで除すと、

$$\sum_{i=1}^n (\delta_{ji}G + \delta_{jis}) \frac{dX_i}{d\varphi} + \sum_{i=1}^n \delta_{ji}G X_i + \delta_{j0} = 0 \dots (17)$$

ここで、δ_{ji}* = δ_{ji}G + δ_{jis} とおくと、

$$\sum_{i=1}^n \delta_{ji}^* \frac{dX_i}{d\varphi} + \sum_{i=1}^n \delta_{ji}G X_i + \delta_{j0} = 0 \dots\dots\dots (18)$$

となり、これが応力法に基づいたクリープに関する弾性方程式である。

ここで、δ_{ji}*は、構造系全体から決まる変位係数であり、δ_{ji}Gは、クリープを起こす部材から決まる変位係数である。

(18)式は、n元の非同次連立微分方程式となり、その一般解を数学的に誘導することはできるが、実務上は非常に煩雑となるため、(18)式を数値積分して求めるのがよい。

また、(18)式は、図-10に示した主桁をコンクリート部材、斜材を鋼部材として誘導した式であるが、これに塔が加わった場合においても、変位係数δ_{ji}*, δ_{ji}G, δ_{j0}にクリープするかしないかの影響を加えればよい。

最後に、数値積分による弾性方程式の解析手順を、前述の計算例a)を用いて説明しておく。

いま、クリープ係数をφ=1.6とし、図-11に示すように、直線変化するものとし、クリープ終了時までφを4等分割、すなわち、dφ=0.4として4回数値積分する。

(18)式より、弾性方程式は次式となる。

$$\delta_{11}^* \cdot \frac{dX_1}{d\varphi} + \delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$$

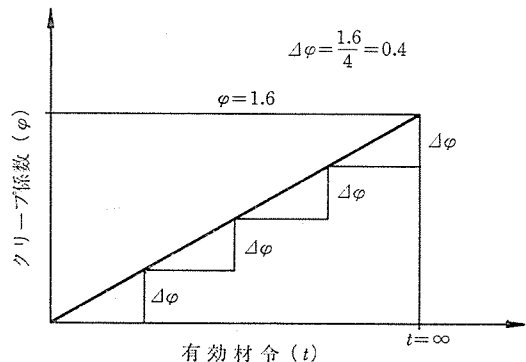


図-11 クリープ係数と有効材令との関係

・第1回目

$$58.32 \times \frac{dX_1}{0.4} + 8.32 \times 3.29 - 192.0 = 0$$

$$\therefore dX_1 = 1.13 \text{ t}$$

・第2回目

$$58.32 \times \frac{dX_1}{0.4} + 8.32 \times (3.29 + 1.13) - 192.0 = 0$$

$$\therefore dX_1 = 1.06 \text{ t}$$

・第3回目

$$58.32 \times \frac{dX_1}{0.4} + 8.32 \times (3.29 + 1.13 + 1.06) - 192.0 = 0$$

$$\therefore dX_1 = 1.00 \text{ t}$$

・第4回目

$$58.32 \times \frac{dX_1}{0.4} + 8.32 \times (3.29 + 1.13 + 1.06 + 1.00) - 192.0 = 0$$

$$\therefore dX_1 = 0.95 \text{ t}$$

したがって、クリープによる斜材張力の変化量 ΔX_1 は、各積分段階の dX_1 を集計すれば求まることになる。

$$\Delta X_1 = 1.13 + 1.06 + 1.00 + 0.95 = 4.14 \text{ t}$$

これは、理論式で求めた $\Delta X_1 = 4.04 \text{ t}$ と約 2% の違

いであるが、積分回数をもう少し大きくとれば、実用上かなりの精度で求めることができる。

5

おわりに

以上、応力法に基づいて PC 斜張橋におけるクリープ解析の基本的考え方について述べたが、更に詳細な事項については、参考文献 2)~5) を参照して頂きたい。また、現在のように電算が普及した状況においては、汎用性のある変形法による解析が望ましく、この解析手法については、文献 5) に詳しく述べられている。

本講座で紹介した PC 斜張橋のクリープ解析に対する基本的考え方が、今後の我が国での PC 斜張橋の普及の一助になれば幸いである。

参 考 文 献

- 4) 荒川敏雄, 佐藤素啓, 渡辺 実: PC 斜張橋のクリープについて, プレストレストコンクリート, Vol. 18, No. 4, 1976
- 5) 星埜正明, 佐伯彰一: コンクリート斜張橋のクリープ解析, 土木学会論文報告集, 第 295 号, 1980

【記: 石原重孝 鹿島建設(株) 土木設計本部副主査】

◀刊行物案内▶

プレストレストコンクリート構造物設計図集 (第2集)

本書は協会設立 20 周年行事の一環として、前回発行した設計図集の様式にならい編集した、その第2集です。協会誌第 10 巻より 21 巻に亘る巻末折込付図を主体とし、写真ならびに説明を付し、その他参考になる PC 構造物についてとりまとめた設計図集で、PC 技術者の座右に備え付けるべき格好の資料と考えます。

希望者は代金(現金為替または郵便振替 東京 7-62774)を添え、下記宛お申し込みください。

体 裁: B4判 224 頁

定 価: 9,000 円(会員特価 7,000 円) 送 料: 1,000 円

内 容: PC 橋梁(道路および鉄道) 74 件, PC 建築構造物 25 件, その他タンクおよび舗装等 10 件

申 込 先: (社)プレストレストコンクリート技術協会

〒102 東京都千代田区麹町 1-10-15 (紀の国やビル) 電話 03 (261) 9151