講座

No. 4

PC 押出し工法と変位法の初歩

1 はじめに

構造技術者にとって，PC 桁に限らず構造解析を行ううえで，電子計算機の利用はもはや日常となっている。

そして，電子計算機の進歩と普及はこれらの構造解析を極めて容易にするとともに，新しい施工法や構造形式の発展にも寄与してきた。

その一つとして PC 押出し工法が挙げられる。PC 桁を押出し架設する場合，その構造系は施工段階を追って順次変化し，主桁断面には完成時とは異なる交番応力が発生する。押出し中の構造解析自体は一般の連続梁の解析と基本的にはなんら変わるものではないが，施工順序を追って計算する必要があるため，必要な計算ケース数は膨大なものとなる。更に，手延べ桁の長さや剛性，撤去時期，あるいは仮支柱や主桁製作ヤードの支持条件など様々な要因を計算に考慮しなければならない。

これらの計算に対して電子計算機の利用はいわば必然性をもったものであり，逆に計算が容易にできるという前提があったからこそ PC 押出し工法が普及したともいえるのである。

しかしながら，電子計算機の発達と普及は一方では構造解析すら構造技術者の手を離れる結果となり，解析の手法といえるプログラムの内容まで関知しなくても答が得られるようになってしまっている。その結果，アウトプットされた答に対して全幅の信頼をもち，入力ミスや構造のモデル化に対する疑問にまでフィードバックすることを時に忘れてしまう。

そこで本講座では，PC 押出し工法における構造系の変化について概要を述べるとともに，構造解析の基本となる変位法の初歩について解説を試みる。最後に，PC 押出し工法の構造解析を行ううえでの配慮すべき事項について述べる。

2 PC 押出し工法における構造系の変化

PC 押出し工法における架設中の構造系は，主として片持ち梁をもった連続梁である。しかしながら，この構造系は施工段階を追って変化するため，それぞれの施工段階の構造系について，断面力を算定しなければならない。

例えば1ブロックを押し出す間においても，手延べ桁先端が支点に到達する直前と直後，設計検討断面が支点上を通過するとき，押出し終了後の荷重や部材が変化するとき，など各々において構造解析が必要となる。

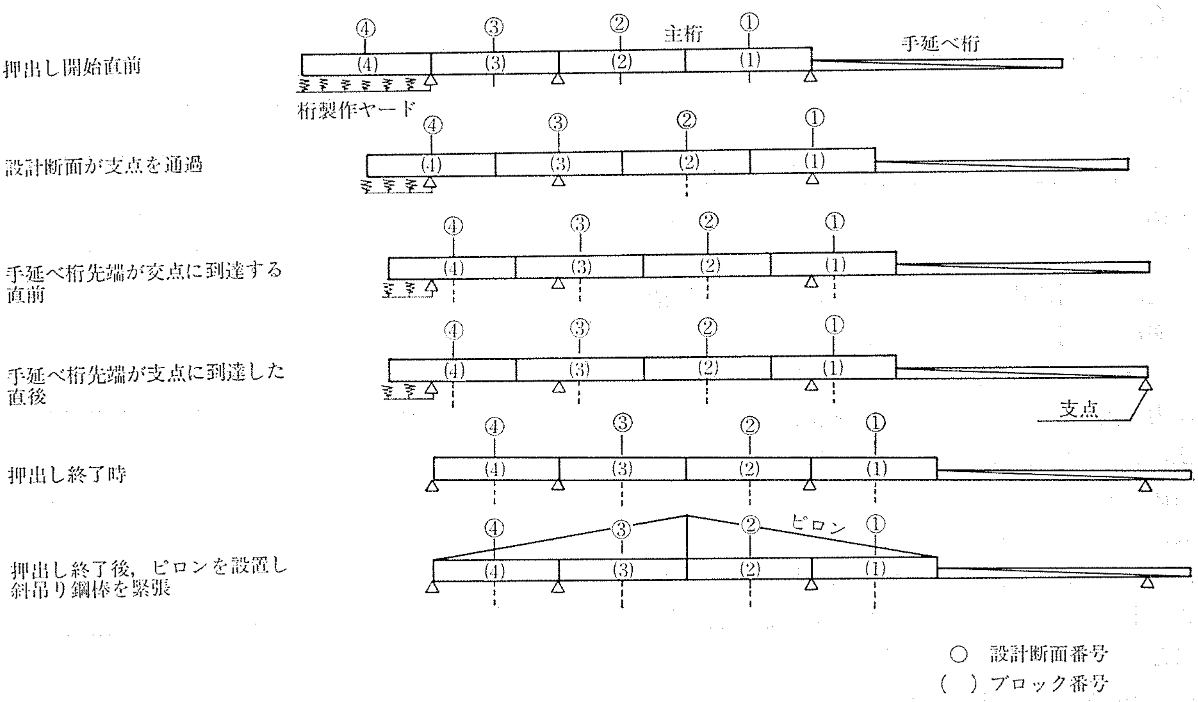
1ブロック押出し中の構造系の変化の一例を 図―1 に示す。また，図―2 には特定の断面が経験する押出し過程における曲げモーメントの変位の一例を示す。

実際の設計において例えば1ブロックの長さが6～10 m 程度で，設計断面がブロック両端を含め3断面としても，スパン長，押出し長，設計断面の間隔により異なるが，1ブロック押出し中に計算を必要とする構造系は 10 ケース以上にも及ぶことがある。更に，全ケースでは桁長 200 m，4径間のものでは 200 ケースにも達する。

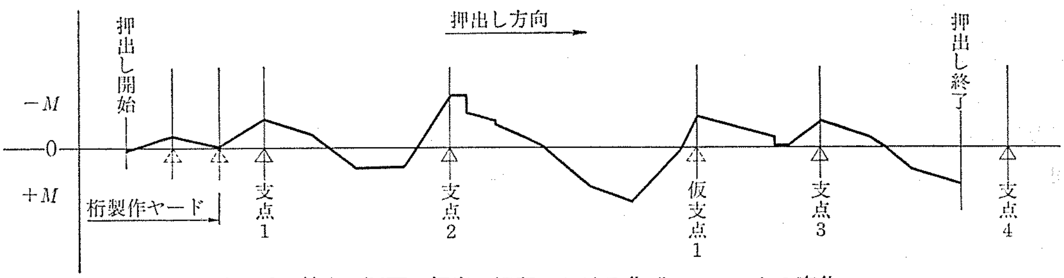
個々のケースはそれぞれ連続桁の解法であるが，押出し工法に適用する場合には上記の施工段階を追った計算がプログラムの機能として要求される。

3 構造解析の基本

最も簡単な構造形式は静定構造であり，つり合い方程式から容易に解くことができる。静定構造の場合，断面



図―1　1ブロック押出し中の構造系の変化



図―2　特定の断面の押出し過程における曲げモーメントの変化

力が構造の変形を考えなくても決定できる。このことは部材の断面積や弾性係数を，断面力の計算に先立って指定する必要がないことを示している。

しかしながら，不静定構造の場合にはつり合い方程式だけでは不十分で，不足している数だけの方程式を変形の連続性あるいは適合性から導かなければならない。構造変形の適合条件を導くにあたっては，力―変位の法則が必要となってくる。

このような点から，不静定構造は構造技術者にとって難しい問題となる。すなわち，解析自体，静定構造の場合と比較して複雑なものであること，そして，変形の幾何学を考えることによって解析を行う必要があるため，部材の断面積や材料の弾性係数があらかじめ指定されなければならず，これらの数値を訂正した場合，再び初めから同じ解法を繰り返す必要があるという点であろう。

したがって，実際の構造解析にあたっては，次の3つの条件が正しく適用されなければならない。

1.　力のつり合い
2.　変形の適合性
3.　力と変形を関係づける Hooke の法則

4　応力法と変位法

構造解析を電子計算機で行う場合，不静定力もしくは節点の変位量を未知量とする連立一次方程式を解く方法が一般的である。前者の不静定力を未知量とする方法が「応力法」と呼ばれる方法であり，後者の節点の変位量を未知量とする方法が「変位法(変形法)」と呼ばれる方法である。

一般に静定構造の解法では，まず荷重による支点反力を計算し，続いて断面力，たわみなどを計算する方法が行われる。不静定構造を応力法によって解く場合もこれと同様な方法で行われる。すなわち，まず不静定力を適当に選び，これらの不静定力と外力の作用のもとで静定基本系の変化が，もとの不静定構造物の変形の条件と合致するように不静定力の大きさを決定する。このようにして不静定力が求まれば，断面力やたわみはこれら不静定力を荷重と考えることにより，静定構造の場合と同様

につり合いの条件から求めることができる。弾性方程式による不静定構造の一般解法，カステリアノの第２定理の応用，３連モーメント式などは「応力法」の部類に属する。

変位法は，応力法とは逆に各節点の変位量を未知量にとる方法である。すなわち，まず断面力を部材の変形量の関数として表わし，各節点における力のつり合いの条件から変形量を未知量として方程式を作り，これを解いてまず変形量を求める。続いて，最初に断面力を変形量で表わした式から断面力を求め，最後に断面力からすべての反力を決定する。このように，変位法による解法は応力法における場合とは逆の計算過程で進められる。たわみ角法は変位法の一つである。

一般に応力法を用いた場合の連立１次方程式の未知量の数は，それと同じ問題を変位法で解く場合の連立１次方程式の未知量の数とは一致しない。ある構造物を解析する場合に，応力法によるか変位法によるかは，その構造物の種類，形および外力の状態などにより判断されるべきである。従来は連立方程式の未知量の数ができるだけ少なくなるような解法が実用的であるとされていた。しかしながら，電子計算機の発達により多くの未知量をもつ連立１次方程式も容易に解くことが可能となったため連立１次方程式の未知数の数より方程式を作る場合の容易さが問題となっている。

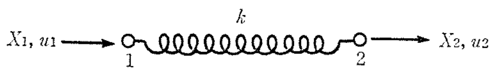
この意味から，変位法による解法の方が電子計算機の特性を生かしているといえる。

5　変位法の初歩

前述したように，変位法は節点の変位量を未知量として構造解析を行う方法である。

そこで，変位法の基本的な手法を説明する手段として簡単な弾性ばねを用いる（図―3）。

図―3 において，外力は節点１と２に働き，変位もこ



図―3　弾　性　ば　ね

の点で測られるものとする。力 X および変位 u の正の方向は図のように定める。力と変位の関係は，

$$X=Ku \qquad (1)$$

で表わされ，ばねは２つの節点をもつから u は２つの未知数からなる。X も２つの未知数であるから K は 2×2 のマトリックスとなる。一般に K は剛性マトリックスと呼ばれる。このKマトリックスを求めるためにばねのとり得る一連の変形状態を考える。

（a）　$u_1=u_1$, $u_2=0$ の場合

節点２が固定の状態である。したがって，X_2 は反力となり，X_1 が外荷重となる。ばね定数の定義から，

$$k=\frac{X_1}{u_1} \qquad (2)$$

となる。力のつり合いおよび (2) 式から

$$X_1=-X_2=ku_1 \qquad (3)$$

となる。

（b）　$u_1=0$, $u_2=u_2$ の場合

第一の場合と同様に，

$$X_2=-X_1=ku_2 \qquad (4)$$

となる。

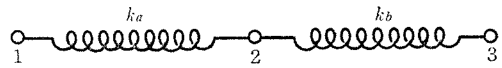
(a) および (b) 以外，この系がとり得る変形様式は存在しない。(3) 式および (4) 式を１つのマトリックス様式にまとめると，

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \qquad (5)$$

となる。このように，$u_1\fallingdotseq0$, $u_2\fallingdotseq0$ なる２つの独立した変形状態を重ね合わせることにより，一般的な場合が求められる。

(5) 式中の K マトリックスは１つの要素の剛性マトリックスであり，この個々の要素の剛性マトリックスから，構造全体の剛性マトリックスを作ることが重要になる。

そこで，図―4 に示すような複合ばねを考える。ばね



図―4　複　合　ば　ね

aおよびbはおのおの k_a および k_b なるばね定数をもっており，節点２で連結されているとする。節点が３つあるため３つの節点力と３つの節点変位が存在する。したがって，剛性マトリックスは 3×3 の次数になる。

(5) 式から，要素の剛性マトリックスは各々について

$$K_a=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_a & -k_a \\ -k_a & k_a \end{bmatrix} \end{array}$$

$$K_b=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_b & -k_b \\ -k_b & k_b \end{bmatrix} \end{array} \qquad (6)$$

で表わされる。この個々のマトリックスを構造全体の剛性マトリックスに引き伸ばすと，

$$K_a=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} k_a & -k_a & 0 \\ -k_a & k_a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ K_\mathrm{b}= & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_\mathrm{b} & -k_\mathrm{b} \\ 0 & -k_\mathrm{b} & k_\mathrm{b} \end{bmatrix} \end{array} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

となる。K_a と K_b を重ね合わせることにより構造全体の剛性マトリックスを得ることができる。

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ K= & \begin{bmatrix} k_\mathrm{a} & -k_\mathrm{a} & 0 \\ -k_\mathrm{a} & k_\mathrm{a}+k_\mathrm{b} & -k_\mathrm{b} \\ 0 & -k_\mathrm{b} & k_\mathrm{b} \end{bmatrix} \end{array} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (8)$$

この構造全体の剛性マトリックスは，単一ばねのときと同様に，複合ばねがとり得るすべての変形状態からも導くことができる。

(8) 式を剛性方程式で表わすと，

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_\mathrm{a} & -k_\mathrm{a} & 0 \\ -k_\mathrm{a} & k_\mathrm{a}+k_\mathrm{b} & -k_\mathrm{b} \\ 0 & -k_\mathrm{b} & k_\mathrm{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \cdots\cdots\cdots (9)$$

となる。(9) 式を解くためには，まず支持（境界）条件を定めなければならない。節点 3 を固定とすることにより $u_3=0$ となり，u_1, u_2 が未知変位となる。この条件は (9) 式を部分マトリックスに分けて $u_3=0$ とすることによって得られる。すなわち

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \hline X_3 \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} k_\mathrm{a} & -k_\mathrm{a} & 0 \\ -k_\mathrm{a} & k_\mathrm{a}+k_\mathrm{b} & -k_\mathrm{b} \\ \hline 0 & -k & k_\mathrm{a} \end{array}\right] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \hline u_3=0 \end{Bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (10)$$

というように分ける。(10) 式において，X_1, X_2 は荷重 X_3 は未知の支点反力である。(10) 式を展開すると次の 2 式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_\mathrm{a} & -k_\mathrm{a} \\ -k_\mathrm{a} & k_\mathrm{a}+k_\mathrm{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

および，

$$\{X_3\} = [\,0 \quad -k_\mathrm{b}\,] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

(11) 式から未知の変位 u_1, u_2 を求めることができ，u_1, u_2 を (12) 式に代入することにより，X_3 が求まる。

このように実際の構造物がどのような形状であろうとそれを理想化し，節点で結合された部材の集合体と考えることにより，個々の部材の剛性マトリックスから構造全体の剛性マトリックスを作ることができる。構造全体の剛性方程式は

$$\{X\}=[K]\{u\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

で表わされる。X は節点力の集合，u はそれらに対応する節点変位の集合である。一般的な構造では X は x, y, z 方向の力のみでなく，曲げおよびねじりモーメントが含まれる。そして，(13) 式の u を未知の節点変位 u_α と境界条件で与えられる既知の変位 u_β の 2 つの部分マトリックスに分け，同様に X を X_α と X_β に分ける。X_α は u_α に対応するもので外荷重を表わし，X_β は u_β に対応するもので未知の支点反力を表わす。これらを考慮すると，(13) 式は，

$$\begin{Bmatrix} X_\alpha \\ X_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\alpha \\ u_\beta \end{Bmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

と表現できる。(14) 式はマトリックス乗算の規則により

$$X_\alpha = K_{\alpha\alpha}u_\alpha + K_{\alpha\beta}u_\beta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (15)$$

および，

$$X_\beta = K_{\beta\alpha}u_\alpha + K_{\beta\beta}u_\beta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

となる。未知の節点変位 u_α は $K_{\alpha\alpha}$ の逆マトリックスをとることにより，

$$u_\alpha = K_{\alpha\alpha}^{-1}(X_\alpha - K_{\alpha\beta}u_\beta) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

で求められる。u_α が求められれば，(16) 式に代入することにより，未知の支点反力 X_β が求まる。

この一般的手法はどのような問題にも適用でき，構造物の静定，不静定に関係なく解を求めることができるという点が変位法の特徴であるといえる。

このことは一方では電子計算機による計算に適しているといえる。すなわち，部材の特性と節点の座標からなるデータを入力として与えれば，計算機は部材の剛性マトリックスを計算し，それらを集めて構造全体の剛性マトリックスを組み立てることができる。次に境界条件と節点荷重を与えることにより解を求めることができる。

6　PC 押出し工法の構造解析

2で述べたように，PC 押出し工法の架設中の構造解析自体は一般の連続梁の解法と変わるものではない。実際の構造解析においては電子計算機が利用され，押出し工法に関するプログラムも各社で開発されている。プログラムの手法も変位法によるものが多く，複雑な部材の変化やあらゆる支承条件に対応できるように整備されている。

ここでは，PC 押出し工法のプログラムを利用するにあたって配慮すべき事項を 2，3 列挙する。

（1） 手延べ桁の入力データについて

主桁先端に取り付けられる鋼製の手延べ桁は，主桁の片持ち梁の状態での曲げモーメントを低減するために主として用いられるが，手延べ桁の荷重の大きさは直接，主桁の曲げモーメントに影響し，剛性も手延べ桁が支点到達後の主桁のモーメントに関与する。実際の施工では受注した業者が保有している手延べ桁が用いられることが多いため，設計段階では手延べ桁に関するデータは仮定することが行われる。設計図書には設計で用いたデー

タを明記しておく必要がある。

（2）　支点条件について

押出し中の曲げモーメントを低減するために支間の中間に仮支柱を設けることも多い。仮支柱は，その目的から橋脚や橋台などの永久構造物の支点に比べて剛性が小さいのが一般である。したがって，仮支柱の支点には鉛直バネを設ける必要があり，鉛直バネの算定には基礎地盤のデータも考慮して求めなければならない。

また，支点間の距離が短い場合，押出し途中において負の反力が生じる場合がある。この負反力を拘束しない支承構造の場合は，支点条件を解除して再度計算をする必要がある。プログラムによってはこの点も考慮されているが，支承構造を考慮したうえで入力する必要がある。

（3）　プレストレスによる2次モーメントについて

押出し仮設中の主桁には，一般に応力が交番するため断面の上下縁に PC 鋼材が配置されるが，PC 鋼材の中立軸が断面の中立軸に対して偏心している場合，主桁にはプレストレスによる2次モーメントが発生する。

押出し中の反力管理が可能な押出し工法を選択した場合は，反力調整により2次モーメントを消去する方法が可能である。設計段階で2次モーメントを考慮する場合は，プレストレスによる偏心モーメントを荷重として入力する方法が採られる。

7　あとがき

PC 押出し工法に限らず，構造解析を行うにあたっては，構造理論の理解と構造物のモデル化に対する適切な判断が必要である。

構造解析の解説については，いわゆる教科書から抜粋する形で紹介させて頂いたが，基本以前の初歩の内容であり，詳しくは参考文献によられたい。読者諸氏の関心の一助ともなれば幸いである。

参　考　文　献

1)　小西，横尾，成岡：構造力学　第II巻，丸善
2)　H.C. マーチン：マトリックス法による構造力学の解法，培風館

【記：広実正人，板井栄次　本誌編集委員】