

コンクリート斜張橋の PC 斜索の設計法について (その1)

小 田 純 夫*

1. ま え が き

騒音低減のため鉄道橋はわずかな例外はあるが、ほとんどコンクリート橋、特に PC 桁橋として計画・建設されてきた。ところが鉄道用の PC 桁橋も、長大支間が要求されるにつれて、桁高や支承反力の増大が工事費や美観の点で、道路橋に比べ顕著な影響を与え、大きな問題を提起するようになった¹⁾。日本鉄道建設公団は、このような問題を解決するコンクリート橋の構造形式として、コンクリート斜張橋に着目、研究開発を目的として現在の三陸鉄道小本川橋梁にこの形式を適用、昭和 54 年世界で初めての本格的な鉄道専用のコンクリート斜張橋が完成した。

道路橋と対比して、鉄道橋に必要な特性は、活荷重によるたわみが小さいこと、および全荷重に占める活荷重の割合が高いのでこの大きな変動荷重に耐え得ることである。小本川橋梁の構造形式の選定に当たり、高張力鋼材の斜索では厳しい活荷重によるたわみ規定を満足するような経済的な構造は不可能であり、PC 斜索タイプのコンクリート斜張橋でなければならないことが確認され、このタイプが採用されることになったのである²⁾。

近年、道路橋には、ほとんど鋼斜索タイプが採用されているが、小本川橋梁完成後、西ドイツにおいて PC 斜索のコンクリート斜張橋が 2 橋実現し、詳細な文献は発表されていないが、道路橋においても PC 斜索の有用性の主張がうかがえる³⁾。

ところで PC 斜索は、その引張荷重に比べて索自重が

大きく、鋼斜索よりはるかに大きなサグを生じ、加えてその大きな曲げ剛性のゆえに、変動荷重によって大きな曲げ応力とその断面に生じる。小本川橋梁においては、この変動荷重による曲げ応力の克服が主たる課題であった。本橋の計画、設計、実験および施工計画に参加する機会を得た筆者は、道路橋における西独の実例も考慮に入れて、経済的な PC 斜索の設計法を探ることにした。

筆者の調査範囲では、表—1 に示すように、PC 斜索を持つ斜張橋の実施例は 9 橋である。小本川橋梁を除くこれらの橋梁の PC 斜索は、すべて橋梁の全死荷重が作用する状態で懸垂曲線となるように施工されている。しかしながら同表の No. 1 から No. 6 の 6 橋では、工事完了後に載荷される変動荷重によって索に生じる曲げモーメントに対する処置が考慮されていない。全荷重に対する変動荷重の割合の小さい道路橋の場合にはあまり問題にならないのかも知れないが、比較的支間の小さい、すなわち変動荷重の比率の大きい、同表の No. 8 および No. 9 ではその影響が充分考慮されている⁴⁾。残念ながら公表された文献はない。

一方、PC 斜索を直線部材とすれば、軸力の変動すなわち変動荷重によってこのような曲げモーメントは発生しない。PC 斜索の断面は、通常の梁すなわち曲げ部材に比べはるかに小さいが、小さな断面に多量に配置された PC 鋼材の緊張力は、索自体に作用する引張力によって大部分が相殺され、大きな軸方向圧縮力は導入されない。したがって、索内の PC 鋼材の偏心量を適切に選ばば、索断面に大きな軸方向圧縮力を生ぜしめること無

表—1 PC 斜索を持つコンクリート斜張橋

No.	橋 名	竣工	所 在	支 間 割	幅 員	桁 高	塔 高	斜 索	構 造 形 式
1	Polcevera	1967	イタリア	86+202+210+140	18.0	4.6	45.0	PC, 2面, 1段	同 上
2	Magliana	1967	イタリア	53.6+145.0	24.2	3.0, 4.0	34.0	PC, 2面, 1段	塔・桁ピン, 柱・脚剛, ゲルバー, 外部定着
3	Wadi Kuf	1972	リビア	97.5+282.0+97.5	13.0	4.0, 7.0	54.1	PC, 2面, 1段	塔・桁・脚剛結, ゲルバー
4	Tiel	1973	オランダ	95+267+95	31.5	3.5	46.3	PC, 2面, 2段, ラディアル	塔・脚剛結, ゲルバー
5	Rio Magdalena	1974	コロンビア	69.5+140.0+69.5	12.5	3.0	21.0	PC, 2面, 1段	塔・脚剛結, 連続
6	Carpineto	1977	イタリア	30.4+181.0+30.4	2×9.5	2.4, 3.5	28.85	PC, 2面, 1段	塔・脚剛結, 桁ヒンジ, ゲルバー, 外部定着
7	小本川橋梁(鉄道)	1979	岩手県	46.4+85.0+46.4	7.3	3.0	17.5	PC, 2面, 2段, ハーブ	塔・桁剛結・連続桁
8	Donau Metten	1980	西ドイツ	68.85+145.0 +4×68.0+60.0	30.0	4.2	32.0	PC, 1面, 1段	塔・脚一体, 連続
9	Floesser	1985	西ドイツ	17.9+41.8+106.5+54.9	24.0	2.25-5.2	21.5	PC, 2面, 1段	塔・桁剛結, 連続

* (株) 千代田コンサルタント

◇論文報告◇

く、索自重によって生じる曲げモーメントを相殺するような曲げモーメントを得ることができる。小本川橋梁で採用された PC 斜索はこの考え方による直線部材である⁵⁾。

本稿は、筆者が昭和 62 年 11 月東京大学に提出した学位請求論文「鉄道コンクリート斜張橋の PC 斜索の設計に関する研究」において、その主題となっている「第 4 章 PC 斜索の設計法」の要約であり、設計例として、道路橋の場合を追加し、懸垂曲線状の斜索と直線形状の梁としての斜索の特徴を論じたものである。

2. 懸垂曲線状の索の解法

ここで索という語を用いているが、これは曲げ剛性を持っている梁のことである⁶⁾。

2.1 一定の引張力を生じている索の両端に対称な角変化を与えた場合

一定の引張力 H を与えられた索の両端に、モーメント M を与えて回転角 θ を生じしめた状態を図-1 に示す。

今、 H : 索の引張力

EI : 索の曲げ剛性

M : 索端部に与えた回転モーメント

\bar{M} : 索端部から x はなれた位置の索に生じる曲げモーメント

L : 索の長さ

として x 点での曲げモーメントの釣合条件を求めると、

$$M + H \cdot y - \bar{M} = 0$$

$$M = \bar{M} - H \cdot y$$

一方、曲率は、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

であるから

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{EI}(\bar{M} - H \cdot y)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{H}{EI} \cdot y + \frac{\bar{M}}{EI} = 0 \dots\dots\dots(1)^{7)}$$

すなわち、式(1)は引張力 H を生じている索の端部に \bar{M} なる回転モーメントを与えたときの索の弾性方程式である。

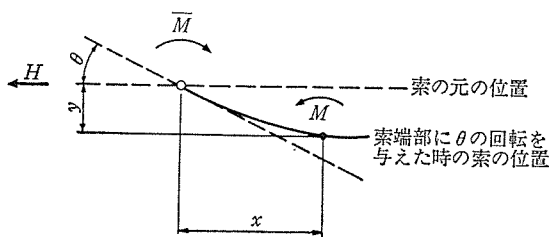


図-1

ここで、

$$\lambda^2 = \frac{H}{EI}$$

とし、また索端の境界条件

$$x=0 \text{ のとき, } y=0 \text{ および } \frac{dy}{dx} = \theta$$

を入れて、左右対称の回転モーメントを与えるものとするれば索中央での角変位は 0 であるから、

$$x = \frac{L}{2} \text{ のとき, } \frac{dy}{dx} = 0$$

として式(1)を解くと、

$$y = \frac{\theta}{\lambda(e^{-\lambda L} - 1)} (e^{\lambda(x-L)} + e^{-\lambda x} - 1 - e^{-\lambda L}) \dots\dots\dots(2)$$

となり、したがって部材端から x 離れた断面では、

$$\begin{aligned} M &= -EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2} \\ &= -\frac{EI \cdot \theta}{\lambda(e^{-\lambda L} - 1)} \cdot \lambda^2 \cdot (e^{\lambda(x-L)} + e^{-\lambda x}) \\ &= \theta \cdot EI \cdot \lambda \cdot \frac{e^{\lambda(x-L)} + e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda L}} \\ &= \theta \cdot \sqrt{H \cdot EI} \cdot \frac{e^{\lambda(x-L)} + e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda L}} \dots\dots\dots(3) \end{aligned}$$

となる。また部材端モーメントは、

$$x=0$$

として

$$\bar{M} = \theta \sqrt{H \cdot EI} \cdot \frac{1 + e^{-\lambda L}}{1 - e^{-\lambda L}} \dots\dots\dots(4)$$

である。

$$L = \infty, \text{ したがって } x-L = -\infty$$

と仮定すれば、これらを式(2)および(3)に代入してそれぞれ

$$y = \frac{\theta}{\lambda} (1 - e^{-\lambda x})$$

$$M = \theta \sqrt{H \cdot EI} \cdot e^{-\lambda x} \dots\dots\dots(5)$$

$$\bar{M} = \theta \sqrt{H \cdot EI} \dots\dots\dots(6)$$

を得る。

2.2 一定の等分布荷重と引張力を受けている索の引張力に増減を与えた場合の解

等分布荷重を受け、曲げ剛性のない索に水平方向の引

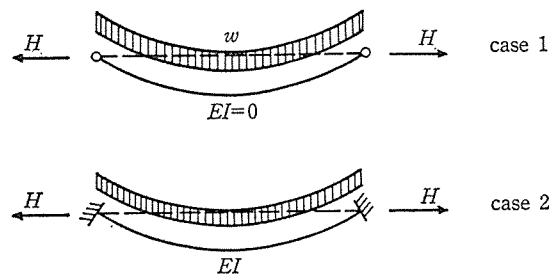


図-2 索の状態の変化

張力 H を与えた状態を 図-2 Case 1 に示す。この釣合い状態のまま索に曲げ剛性 EI を与え両端の回転を固定する。すると Case 2 の状態となり、索に曲げモーメントは生じていない。Case 2 の状態の索に ΔH の水平引張力を追加すると索に曲げモーメントが生じる。この状態を解くため、(1) の場合と同様に両端をヒンジと仮定し、曲げ剛性のある索に水平力 ΔH を追加してその形状を求め、両索端に対称な回転モーメント \bar{M} を与えて Case 2 の索端の回転角に戻す操作を行う (図-3 参照)。

曲げ剛性を与え端部の回転を固定する前の状態は次のとおりである。すなわち、

H : 水平引張力

w : 索の単位長さ当りの自重

y_{ox} : x 点でのたわみ

θ_0 : o 点での回転角

L : 索の全長

とすれば、図-4 を参照して、 x 点でのモーメントの釣合は、

$$M + H y_{ox} - \frac{wL}{2} \cdot x + \frac{wx^2}{2} = 0$$

であり、

$$M = 0$$

であるから、

$$y_{ox} = \frac{wx(L-x)}{2H}$$



図-3 解析の基本モデル

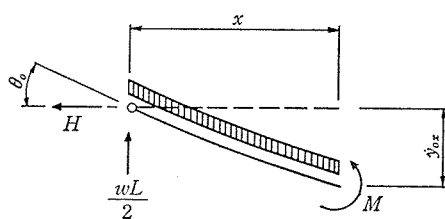


図-4 水平引張力 H が働いている場合

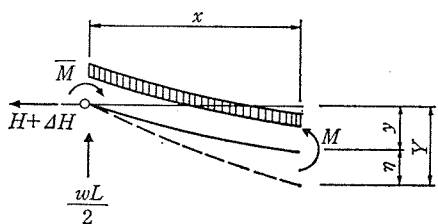


図-5 曲げ剛性のある索に $H + \Delta H$ が作用した場合

となり、部材端の回転角は、

$$\theta_0 = \frac{wL}{2H}$$

である。

次に水平引張力が $H + \Delta H$ となり部材端に回転拘束モーメント \bar{M} が作用する場合の、曲げ剛性 EI を持つ索の弾性方程式を求める。図-5 を参照して、 x 点でのモーメントの釣合を求めると、

$$M + (H + \Delta) y - M - \frac{wx(L-x)}{2} = 0$$

となる。今、

$$y = y_{ox} + \eta$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$

であるから、これをモーメントの釣合式に代入すると、

$$-EI \cdot \frac{d^2\eta}{dx^2} + (H + \Delta H)(y_{ox} + \eta) - M - \frac{wx(L-x)}{2} = 0$$

となる。ここで、

$$y_{ox} = \frac{wx(L-x)}{2H}$$

という条件——引張力 H が働いている状態では索に曲げモーメントが生じていないという条件——を代入すると、

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} - \frac{H + \Delta H}{EI} \cdot \eta - \frac{\Delta H w}{2H \cdot EI} x(L-x) + \frac{\bar{M}}{EI} = 0 \dots\dots\dots(10)$$

となり、これが索の弾性方程式である。

ここで、

$$\lambda^2 = \frac{H + \Delta H}{EI}$$

とすれば式 (10) は、

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} - \lambda^2 \eta - \frac{\Delta H w}{2H \cdot EI} x(L-x) + \frac{\bar{M}}{EI} = 0 \dots\dots\dots(11)$$

と書き換えられる。式 (11) の一般解は、

$$\eta = A \cdot e^{\lambda x} + B \cdot e^{-\lambda x} + Cx(L-x) + D \dots\dots\dots(12)$$

で表わされる。境界条件、

$$x=0 \text{ のとき、} \eta=0, \frac{d\eta}{dx}=0$$

および、

$$x = \frac{L}{2} \text{ のとき、} \frac{d\eta}{dx} = 0$$

を一般解に代入すると、

$$A + B + D = 0 \dots\dots\dots(13)$$

$$\lambda(A - B) + CL = 0 \dots\dots\dots(14)$$

$$\lambda(A \cdot e^{\frac{\lambda L}{2}} - B \cdot e^{-\frac{\lambda L}{2}}) = 0 \dots\dots\dots(15)$$

◇論文報告◇

が成立する。

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = \lambda^2(A \cdot e^{\lambda x} + B \cdot e^{-\lambda x}) - 2C \quad \dots\dots\dots(16)$$

であるから、(12) と (16) を (11) に代入すれば、

$$-2C - \lambda^2 C x(L-x) - \lambda^2 D - \frac{\Delta H w}{2H \cdot EI} x(L-x) + \frac{\bar{M}}{EI} = 0$$

これを整理して、

$$-\left(\lambda^2 C + \frac{\Delta H w}{2H \cdot EI}\right) \cdot x(L-x) - \left(2C + \lambda^2 D - \frac{\bar{M}}{EI}\right) = 0$$

となる。この関係は恒等的に成立しなければならないから、 x が 0 または L の場合を考慮すれば、

$$2C + \lambda^2 D - \frac{\bar{M}}{EI} = 0$$

であり、したがって、

$$\lambda^2 C + \frac{\Delta H w}{2H \cdot EI} = 0$$

である。したがって、

$$C = -\frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{\Delta H w}{2H \cdot EI} = -\frac{EI}{H + \Delta H} \cdot \frac{\Delta H w}{2H \cdot EI} = -\frac{\Delta H w}{2H(H + \Delta H)}$$

$$D = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\bar{M}}{EI} - 2C \right)$$

また (15) より、

$$A = B \cdot e^{-\lambda L}$$

これを (14) に代入すれば、

$$\lambda B(e^{-\lambda L} - 1) - \frac{\Delta H w L}{2H(H + \Delta H)} = 0$$

$$\therefore B = \frac{wL}{2H} \cdot \frac{\Delta H}{2H(H + \Delta H)} \cdot \frac{1}{\lambda(e^{-\lambda L} - 1)}$$

$$\therefore A = \frac{wL}{2H} \cdot \frac{\Delta H}{2H(H + \Delta H)} \cdot \frac{e^{-\lambda L}}{\lambda(e^{-\lambda L} - 1)}$$

A, B および D を (13) に代入すれば、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{wL}{2H} \cdot \frac{\Delta H}{H + \Delta H} \cdot \frac{e^{-\lambda L} + 1}{e^{-\lambda L} - 1} \\ & + \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{\bar{M}}{EI} + \frac{\Delta H w}{H(H + \Delta H)} \right\} = 0 \\ \therefore & \frac{wL}{2H} \cdot \frac{\Delta H}{H + \Delta H} \cdot \frac{e^{-\lambda L} + 1}{e^{-\lambda L} - 1} \\ & \cdot \sqrt{\frac{(H + \Delta H)EI}{EI}} + \frac{\bar{M}}{EI} + \frac{\Delta H w}{H(H + \Delta H)} = 0 \\ \therefore & \bar{M} = \frac{wL}{2H} \cdot \frac{\Delta H}{H + \Delta H} \cdot \frac{1 + e^{-\lambda L}}{1 - e^{-\lambda L}} \\ & \cdot \sqrt{(H + \Delta H)EI} - \frac{\Delta H w}{\lambda^2 H} \end{aligned}$$

$$= \frac{wL}{2H} \cdot \frac{\Delta H}{H + \Delta H} \cdot \sqrt{(H + \Delta H)EI} \cdot \left\{ \frac{1 + e^{-\lambda L}}{1 - e^{-\lambda L}} - \frac{2}{\lambda L} \right\} \quad \dots\dots\dots(17)$$

として直接部材端モーメントが得られる。任意点 x のモーメントは、

$$M = -EI \cdot \frac{d^2\eta}{dx^2}$$

であるから (16) に A, B および C を代入して同様な手順で、

$$M = \frac{wL}{2H} \cdot \frac{\Delta H}{H + \Delta H} \cdot \sqrt{(H + \Delta H)EI} \cdot \left\{ \frac{e^{-\lambda x} + e^{\lambda(x-L)}}{1 - e^{-\lambda L}} - \frac{2}{\lambda L} \right\} \quad \dots\dots\dots(18)$$

として得られる。

2.3 実用計算への解の適用法と両解法の比較

実際の、PC 斜索は、斜索に橋梁の全自重による引張力 H が働く懸垂曲線となるように施工される。したがって全自重が作用している場合には、索に曲げモーメントは生じていない。

版上死荷重が載荷され、索の引張力が ΔH だけ増大した場合に、解法 (1) を用いて次のように近似的に索の曲げモーメントを求めることができる。図—3 において、破線は全自重による引張力 H が作用しているときの斜索の形状、実線は、曲げ剛性の無い索に引張力 $H + \Delta H$ が作用したときの斜索の形状とする。すなわち破線は引張力 H が作用しているとき、また実線は引張力 $H + \Delta H$ が作用しているときの曲げ剛性のない斜索の懸垂曲線である。両曲線の部材端における回転角の差 $\Delta\alpha$ を、式 (3) における θ に代入すれば、索の任意点の曲げモーメントが得られる。また部材端モーメントは式 (4)、部材長が無量大と看なせる場合には、式 (5)、式 (6) のそれぞれの θ に $\Delta\alpha$ を代入すればよい。

ところがこのようにして解く場合には、索端部の回転拘束を開放し、引張力が ΔH だけ増大したとき索には曲げ剛性が無く、引張力 $H + \Delta H$ に応ずる懸垂曲線を形成するという仮定がある。実際には、曲げ剛性があるので、図—4 の $\Delta\alpha$ はもっと小さくなる。すなわちこの仮定で解くと、部材端曲げモーメントの絶対値は実際より大きく、逆に部材中央部では部材端と逆符号の曲げモーメントの絶対値が小さくなる。

解法 (2) の場合には引張力が ΔH だけ増大したとき、索の両端は第 1 の解の場合と同じようにヒンジと仮定しているが、索には曲げ剛性 EI があって索の変形に抵抗しており索には曲げモーメントが生じている。その時の部材端の回転角 $\Delta\alpha$ (図—3 参照) は、解法 (1) の場合より小さい。次に部材端を $-\Delta\alpha$ だけ回転して元の状態に戻すために必要なモーメント M を求めているが、解

法 (1) の場合より回転角が小さいので部材端モーメント M も小さい。そのかわり部材中央部の曲げモーメントは大きくなる。この解は厳密解である。

第 1 の解すなわち式 (3) を上述のように利用する場合、式 (3) における H は式 (18) における

$$(H + \Delta H)$$

に、また式 (3) における θ は

$$\frac{wL}{2H} \cdot \frac{\Delta H}{H + \Delta H}$$

に相当するので、式 (3) は、

$$M = \frac{wL}{2H} \cdot \frac{\Delta H}{H + \Delta H} \cdot \sqrt{(H + \Delta H) \cdot EI} \cdot \frac{e^{-\lambda x} + e^{\lambda(x-L)}}{1 - e^{\lambda L}} \dots \dots \dots (3)'$$

と書き直すことができる。すなわち式 (3)' は式 (18) における { } 内における

$$\frac{2}{\lambda L}$$

を除いたものと同じである。

L および H/EI が十分に大きな場合、すなわち鋼斜索や吊床版橋の端部の局所的な曲げ応力を検証する場合等には、第 1 の解が式 (6) の形で利用されている。しかしながら、PC 斜索のように、 L および H/EI が小さい場合には、式 (6) は実際よりはるかに大きな値を与えるので、実用的ではなく、第 2 の解を用いることが必要である。

(つづく)

【昭和 63 年 4 月 1 日受付】

◀刊行物案内▶

プレストレストコンクリート構造物の設計・施工と最近の話題

(第 13 回 PC 技術講習会テキスト)

体 裁 : A 4 判 160 頁
 定 価 : 3,500 円 送 料 : 450 円
 内 容 : (A) 緊張材引張力と伸びとの関係——FIP Commission on Practical Construction WG 報告から——引張力～伸び関係についての基本、設計上の観点、FIP Commission の方法による μ , k 推定法、例題。(B) PC 板埋設型枠の利用による構造の実例、PC 板埋設型枠合成床版に関する実験的研究、同設計例、設計施工上の問題点と適用の実例。(C) 海洋構造物への PC の応用、海洋 PC 構造物の現状、本四連絡橋工事用 PC バージ、横浜港横断橋の PC バージ。(D) プレストレストコンクリート橋の施工について、まえがき、型枠支保工、コンクリート工、鉄筋工、プレストレッシング工、PC グラウト工、架設工。(E) 維持管理面よりみたプレストレストコンクリート構造物の細部設計、まえがき、損傷事例の調査、改善法の提案、あとがき。(F) 新幹線大宮—上野間のプレストレストコンクリート橋とその技術、まえがき、T 形桁の標準設計、主な PC 橋りょう、技術上の問題点。