

コンクリート構造物のクリープ解析における 微分方程式と弾性床上の梁への適用

佐藤 昇*1・吉川 一成*2・佐藤 成*3

1. はじめに

近年、上部構造へのプレストコンクリート構造（以下 PC 構造）の適用は、その数も多く設計手法も確立されつつあるのに対して、地下構造への PC 構造の適用は比較的少なく、この傾向はとりわけ国内において顕著である。しかしながら、昨今の大都市圏を中心とした地価高騰によって、地下空間の有効利用が各方面から提案され、各種の大深度地下構造物が計画されている。

このような地下構造物には、土圧や水圧などの常時荷重が作用するため、大きな外力に対してフレキシブルな対応が可能な PC 構造の採用が有効となる。PC 構造を地下構造物に適用する場合、その問題点として、地盤と構造物の相互作用の不明確さがあげられるが、地盤反力の影響によるクリープ挙動の変化もそのひとつである。

これまで、クリープ解析は一般の梁部材について、幾多の研究・提案がなされ、その成果が設計などの実場面に活用されてきた。こうした経緯を踏まえて本報告では、地盤反力の影響下にあるコンクリート構造物のクリープによる 2 次元的な挙動を解析する方法について論じる。

本論では、まず、クリープ進行時の梁部材の微分方程式を考察し、これを弾性床上の梁部材に適用し、基礎微分方程式を誘導する。次に、これを解いて変位法における移行式を導くこととする。

2. 微分方程式

2.1 梁部材に発生するひずみ

通常、骨組構造物の応力、あるいは変形を解析するために用いられる梁部材に発生するひずみは式 (2.1) に示すように、3 つに分類することができる。

$$\varepsilon = \varepsilon_{ex} + \varepsilon_{in} + \varepsilon_{si} \dots \dots \dots (2.1)$$

ε_{ex} は、死荷重などの外力により、梁部材が弾性的に変

形する挙動を示す。汎用の骨組解析プログラムでは、これらは集中荷重あるいは分布荷重といった、任意の荷重に対する線形弾性解析として提供されている。これは便宜的に式 (2.2) のように表現することもある。

$$\varepsilon_{ex} = \frac{\sigma_{ex}}{E} \dots \dots \dots (2.2)$$

ここで、

σ_{ex} : 外力によって梁部材に発生する応力度

E : 弾性係数

である。

また、 ε_{in} は、温度差、温度変化あるいはクリープ、乾燥収縮などの、梁部材内部から発生するひずみを示す。例えば、 $\Delta T^\circ\text{C}$ の温度上昇によって発生する ε_{in} は α を線膨張係数として、 $\alpha \cdot \Delta T$ である。

一方、 ε_{si} は、 ε_{in} の発生に起因して、2 次的に発生するひずみである。温度差ならびに温度変化による不静定 2 次応力、あるいは段階施工に伴う材令差に起因するクリープ、乾燥収縮の 2 次応力に対応する量である。

本報告では、クリープひずみを対象とするため、 $\varepsilon_{in} + \varepsilon_{si}$ に限定して、これ以降、論を進めることとする。

2.2 クリープによるひずみ

クリープによって発生するひずみは、H. Trost の累加原則ならびに D. Schade が与えた材令係数 $\rho(t, \tau)$ を用いて次式で示される。

$$\varepsilon_k(t) = \varepsilon_{in} + \varepsilon_{si} = \frac{\sigma_e(t)}{E_c} \cdot \varphi(t, \tau) + \frac{\sigma_k(t)}{E_c} [1 + \rho(t, \tau) \cdot \varphi(t, \tau)] \dots \dots (2.3)$$

ここで、

$\sigma_e(\tau)$: 持続荷重によって発生した弾性応力度

E_c : コンクリートの弾性係数

$\varphi(t, \tau)$: 材令 τ で持続荷重が載荷されたときの経過時間 t におけるクリープ係数

$\sigma_k(t)$: クリープによって発生する 2 次応力度

である。

*1 Noboru SATO : パシフィックコンサルタンツ(株) 情報技術部

*2 kazushige YOSHIKAWA : パシフィックコンサルタンツ(株) 構造部

*3 Shigeru SATO : パシフィックコンサルタンツ(株) 構造部

◇研究報告◇

式(2.3)は、クリープ進行時の弾性係数 E_φ を用いることにより式(2.4)にまとめられる。

$$\varepsilon_k(t) = \varepsilon_{in} + \varepsilon_{si} = \frac{\sigma_e(t)}{E_c} \cdot \varphi(t, \tau) + \frac{\sigma_k(t)}{E_\varphi} \quad \dots\dots\dots(2.4)$$

ここで、

$$E_\varphi = \frac{E_c}{1 + \rho(t, \tau) \cdot \varphi(t, \tau)} \quad \dots\dots\dots(2.5)$$
 である。

2.3 曲げ変形

内部から発生するひずみによる曲率の変化を ϕ 、たわみを y 、曲げモーメントを M とすると、微小変形および平面保持の仮定より次式が導かれる。

$$M = -EI \frac{d^2y}{dx^2} + EI \cdot \phi \quad \dots\dots\dots(2.6)$$

梁部材の上下縁の温度差が $T^\circ\text{C}$ であった場合、部材厚を h とすれば、 ϕ は、

$$\phi = \frac{\alpha T}{h} \quad \dots\dots\dots(2.7)$$

である。ここで、曲げモーメント M は、曲率の変化 ϕ と $\frac{d^2y}{dx^2}$ の双方に対応した量であることに注意する必要がある。

さて、クリープによって発生する曲げモーメントを M^φ 、これに対応するたわみを y^k とすると、 M^φ は、クリープによる2次応力であり、 y^k による曲率変化以外に寄与しないと仮定することにより、次式が示される。

$$M^\varphi = -E_\varphi I \frac{d^2y^k}{dx^2} \quad \dots\dots\dots(2.8)$$

ここで、弾性係数は時間の影響を取り込んだクリープ進行時の弾性係数 E_φ を用いる。

一方、クリープひずみに関して式(2.4)の関係があるため、これを適用する。クリープによって発生するたわみを y^φ 、持続荷重が載荷されたときの弾性変位量を y^e とすると、

$$\frac{d^2y^\varphi}{dx^2} = \frac{d^2y^e}{dx^2} \cdot \varphi(t, \tau) + \frac{d^2y^k}{dx^2} \quad \dots\dots\dots(2.9)$$

である。したがって、式(2.9)を式(2.8)に代入して整理することによって、次式が得られる。

$$M^\varphi = -E_\varphi I \frac{d^2y^\varphi}{dx^2} + E_\varphi I \frac{d^2y^e}{dx^2} \cdot \varphi(t, \tau) \quad \dots\dots\dots(2.10)$$

再び式(2.6)に注目すると、同式において、

$$\phi = \frac{d^2y^e}{dx^2} \cdot \varphi(t, \tau) \quad \dots\dots\dots(2.11)$$

とし、弾性係数 E を E_φ に書きかえることにより、式(2.10)が得られる。このことから式(2.10)の右辺第2項は、持続荷重が載荷されたときの弾性ひずみに起因す

る内部ひずみの影響を表現したものと、とらえることができる。

2.4 伸縮変形

内部から発生するひずみの変化を $\Delta\varepsilon$ 、軸方向変位を u 、軸力を N とすると、

$$N = EA \frac{du}{dx} + EA \cdot \Delta\varepsilon \quad \dots\dots\dots(2.12)$$

である。梁部材全体が $\Delta T^\circ\text{C}$ だけ温度が上昇した場合の $\Delta\varepsilon$ は、

$$\Delta\varepsilon = \alpha \cdot \Delta T \quad \dots\dots\dots(2.13)$$

となる。

さて、曲げ変形同様、クリープによって発生する軸力を N^φ 、これに対応する軸方向変位を u^k とすると、

$$N^\varphi = E_\varphi A \frac{du^k}{dx} \quad \dots\dots\dots(2.14)$$

である。また、式(2.4)により、

$$\frac{du^\varphi}{dx} = \frac{du^e}{dx} \cdot \varphi(t, \tau) + \frac{du^k}{dx} \quad \dots\dots\dots(2.15)$$

の関係が成り立つため、式(2.14)に式(2.15)を代入することによって次式が得られる。

$$N^\varphi = E_\varphi A \frac{du^\varphi}{dx} - E_\varphi A \frac{du^e}{dx} \cdot \varphi(t, \tau) \quad \dots\dots\dots(2.16)$$

式(2.16)の右辺第2項は、式(2.12)のそれに対応しており、持続荷重が載荷されたときの軸方向弾性ひずみに起因する内部ひずみの影響を表している。式(2.10)ならびに式(2.16)を、曲げ変形、伸縮変形に関するクリープ挙動の微分方程式と呼ぶことにする。

3. 弾性床上の梁部材への適用

前節では、内部ひずみによる梁部材の力学的挙動を考察し、クリープ解析における曲げ変形および伸縮変形に関する微分方程式を誘導した。本節では、これらの微分方程式の適用について述べる。

一般の梁部材について、前節で導いた微分方程式(2.10)および(2.16)を用いて、基礎微分方程式を誘導し移行式を求めると、文献6)が提案している移行式に完全に一致する。

筆者らは、クリープにより発生する断面力を計算する方法として、クリープ進行時の弾性係数 E_φ を用いる方法は、実際的で有効な方法のひとつであると考えられる。

そこで、ここではクリープ進行時の弾性係数を用いた前節の微分方程式を弾性床上の梁部材に対して適用する方法について述べる。

3.1 曲げ変形

クリープによって発生する曲げモーメントを $E\mathcal{M}$ 、たわみを $y\mathcal{L}$ とすれば、微分方程式(2.10)は次式となる

る。

$$M_x^\varphi = -E_\varphi I \frac{d^2 y_x^\varphi}{dx^2} + \varphi(t, \tau) \cdot E_\varphi I \frac{d^2 y_x^e}{dx^2} \dots\dots\dots (3.1)$$

また、任意点 x における弾性床上の梁部材の微小要素において、 x 点におけるモーメント釣合いと鉛直方向の釣合いから、それぞれ、

$$\Sigma M = 0 \text{ より, } S_x^\varphi = \frac{dM_x^\varphi}{dx} \dots\dots\dots (3.2)$$

$$\Sigma V = 0 \text{ より, } \frac{dS_x^\varphi}{dx} = KDy_x^\varphi \dots\dots\dots (3.3)$$

が得られる。ここで、 S_x^φ はクリープによって発生するせん断力である。また、 K と D は軸直角方向の地盤反力係数と梁部材の幅である。↗

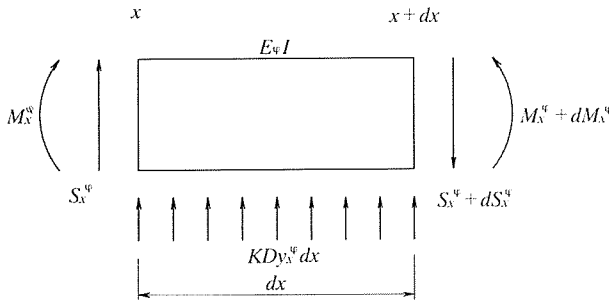


図-1 弾性床上の梁部材の微小要素 (曲げ変形)

さらに式 (3.1), (3.2) および (3.3) より、次のようなたわみ y_x^φ に関する基礎微分方程式が得られる。

$$E_\varphi I \frac{d^4 y_x^\varphi}{dx^4} + KDy_x^\varphi = \varphi(t, \tau) \cdot E_\varphi I \frac{d^4 y_x^e}{dx^4} \dots\dots\dots (3.4)$$

基礎微分方程式 (3.4) は、4 次の非斉次線形微分方程式であり、その一般解は同式右辺をゼロとした方程式の基本解とひとつの特別解の和として求めることができる。

すなわち、式 (3.4) の一般解は、 $E_c I \frac{d^4 y_x^e}{dx^4} + KDy_x^e = q_0 + p_0 x$ であることを考慮して、

$$y_x^\varphi = C_1 \cdot e^{\beta_\varphi x} \cos \beta_\varphi x + C_2 \cdot e^{\beta_\varphi x} \sin \beta_\varphi x + C_3 \cdot e^{-\beta_\varphi x} \cos \beta_\varphi x + C_4 \cdot e^{-\beta_\varphi x} \sin \beta_\varphi x + \varphi(t, \tau) \cdot \frac{E_\varphi}{E_\varphi - E_c} \left(y_x^e - \frac{q_0 + q_0 x}{KD} \right) \dots\dots\dots (3.5)$$

となる。ここで、 C_1, C_2, C_3 および C_4 は梁部材両端の状態によって決定される未定積分定数である。また、 q_0 と p_0 はそれぞれ $x=0$ における荷重強度と荷重の増加率であり、 β_φ は次式により計算される。

$$\beta_\varphi = \sqrt[4]{\frac{KD}{4E_\varphi I}} \dots\dots\dots (3.6)$$

式 (3.1), (3.2) および (3.5) からクリープによって生じる変位 $y_x^\varphi, \theta_x^\varphi$ および断面力 M_x^φ, S_x^φ を求めると式 (3.7) のようになる。

$$\begin{bmatrix} y_x^\varphi \\ \theta_x^\varphi \\ M_x^\varphi \\ S_x^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{d}{dx} \\ -E_\varphi I \frac{d^2}{dx^2} \\ -E_\varphi I \frac{d^3}{dx^3} \end{bmatrix} y_x^\varphi + \varphi(t, \tau) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_\varphi I \frac{d^2 y_x^e}{dx^2} \\ E_\varphi I \frac{d^3 y_x^e}{dx^3} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta_\varphi \\ 2E_\varphi I \beta_\varphi^2 \\ 2E_\varphi I \beta_\varphi^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ e^{\beta_\varphi x} \cos \beta_\varphi x & e^{\beta_\varphi x} \sin \beta_\varphi x & e^{-\beta_\varphi x} \cos \beta_\varphi x & e^{-\beta_\varphi x} \sin \beta_\varphi x \\ e^{\beta_\varphi x} (\cos \beta_\varphi x & -\sin \beta_\varphi x) & e^{\beta_\varphi x} (\cos \beta_\varphi x & +\sin \beta_\varphi x) \\ e^{\beta_\varphi x} \sin \beta_\varphi x & -e^{\beta_\varphi x} \cos \beta_\varphi x & e^{-\beta_\varphi x} \sin \beta_\varphi x & e^{-\beta_\varphi x} \cos \beta_\varphi x \\ e^{\beta_\varphi x} (\cos \beta_\varphi x & +\sin \beta_\varphi x) & e^{\beta_\varphi x} (\cos \beta_\varphi x & -\sin \beta_\varphi x) \\ e^{-\beta_\varphi x} (\cos \beta_\varphi x & -\sin \beta_\varphi x) & e^{-\beta_\varphi x} (\cos \beta_\varphi x & +\sin \beta_\varphi x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} \\ + \varphi(t, \tau) \cdot \frac{E_\varphi}{E_\varphi - E_c} \begin{bmatrix} y_x^e - \frac{q_0 + p_0 x}{KD} \\ \theta_x^e - \frac{p_0}{KD} \\ M_x^e - E_c I \frac{\alpha T}{h} \\ S_x^e \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.7)$$

ここで、式 (3.7) の右辺第 1 項の第 1 行右上の D は、同行列が対角行列であることを表す。次に $x=0$ での境界条件から式 (3.7) の中の未定積分定数を求めることにする。 $x=0$ における変位量と断面力を

$$\begin{bmatrix} y_x^\varphi \\ \theta_x^\varphi \\ M_x^\varphi \\ S_x^\varphi \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} y_0^\varphi \\ \theta_0^\varphi \\ M_0^\varphi \\ S_0^\varphi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_x^e \\ \theta_x^e \\ M_x^e \\ S_x^e \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} y_0^e \\ \theta_0^e \\ M_0^e \\ S_0^e \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.8)$$

として、式(3.7)を整理すると、未定積分定数は次のように決定される。

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4\beta_\varphi} & 0 & \frac{1}{8E_\varphi I \beta_\varphi^3} \\ 0 & \frac{1}{4\beta_\varphi} & -\frac{1}{4E_\varphi I \beta_\varphi^2} & -\frac{1}{8E_\varphi I \beta_\varphi^3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4\beta_\varphi} & 0 & -\frac{1}{8E_\varphi I \beta_\varphi^3} \\ 0 & \frac{1}{4\beta_\varphi} & \frac{1}{4E_\varphi I \beta_\varphi^2} & -\frac{1}{8E_\varphi I \beta_\varphi^3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0^\varphi \\ \theta_0^\varphi \\ M_0^\varphi \\ S_0^\varphi \end{bmatrix} - \varphi(t, \tau) \cdot \frac{E_\varphi}{E_\varphi - E_c} \begin{bmatrix} y_0^e - \frac{q_0}{KD} \\ \theta_0^e - \frac{p_0}{KD} \\ M_0^e - E_c I \frac{\alpha T}{h} \\ S_0^e \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.9)$$

式(3.9)を式(3.7)に代入して整理し、 $x=l$ とすることによって、次式に示す曲げ変形に関する移行式が得られる。

$$\begin{bmatrix} y_l^\varphi \\ \theta_l^\varphi \\ M_l^\varphi \\ S_l^\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\beta_\varphi l} \cos \beta_\varphi l & e^{\beta_\varphi l} \sin \beta_\varphi l & e^{-\beta_\varphi l} \cos \beta_\varphi l & e^{-\beta_\varphi l} \sin \beta_\varphi l \\ \beta_\varphi e^{\beta_\varphi l} \cdot (\cos \beta_\varphi l - \sin \beta_\varphi l) & \beta_\varphi e^{\beta_\varphi l} \cdot (\cos \beta_\varphi l + \sin \beta_\varphi l) & -\beta_\varphi e^{-\beta_\varphi l} \cdot (\cos \beta_\varphi l + \sin \beta_\varphi l) & \beta_\varphi e^{-\beta_\varphi l} \cdot (\cos \beta_\varphi l - \sin \beta_\varphi l) \\ 2E_\varphi I \beta_\varphi^2 \cdot e^{\beta_\varphi l} \sin \beta_\varphi l & -2E_\varphi I \beta_\varphi^2 \cdot e^{\beta_\varphi l} \cos \beta_\varphi l & -2E_\varphi I \beta_\varphi^2 \cdot e^{-\beta_\varphi l} \sin \beta_\varphi l & 2E_\varphi I \beta_\varphi^2 \cdot e^{-\beta_\varphi l} \cos \beta_\varphi l \\ 2E_\varphi I \beta_\varphi^3 \cdot e^{\beta_\varphi l} \cdot (\cos \beta_\varphi l + \sin \beta_\varphi l) & -2E_\varphi I \beta_\varphi^3 \cdot e^{\beta_\varphi l} \cdot (\cos \beta_\varphi l - \sin \beta_\varphi l) & -2E_\varphi I \beta_\varphi^3 \cdot e^{-\beta_\varphi l} \cdot (\cos \beta_\varphi l - \sin \beta_\varphi l) & -2E_\varphi I \beta_\varphi^3 \cdot e^{-\beta_\varphi l} \cdot (\cos \beta_\varphi l + \sin \beta_\varphi l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0^\varphi \\ \theta_0^\varphi \\ M_0^\varphi \\ S_0^\varphi \end{bmatrix} - \varphi(t, \tau) \frac{E_\varphi}{E_\varphi - E_c} \begin{bmatrix} y_0^e - \frac{q_0}{KD} \\ \theta_0^e - \frac{p_0}{KD} \\ M_0^e - E_c I \frac{\alpha T}{h} \\ S_0^e \end{bmatrix} + \varphi(t, \tau) \cdot \frac{E_\varphi}{E_\varphi - E_c} \begin{bmatrix} y_l^e - \frac{q_0 + p_0 l}{KD} \\ \theta_l^e - \frac{p_0}{KD} \\ M_l^e - E_c I \frac{\alpha T}{h} \\ S_l^e \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.10)$$

今、式(3.10)を左辺から右辺にマトリックス単位に順次、以下のように記述することにする。

$${}^M W_l^\varphi = {}^M C_l^\varphi \beta \{ {}^M W_0^\varphi - {}^M P_0^e \} + {}^M P_l^e \dots\dots\dots (3.11)$$

式(3.11)は、次のように変形できる。

$${}^M W_l^\varphi = {}^M C_l^\varphi \beta {}^M W_0^\varphi - {}^M C_l^\varphi \beta {}^M P_0^e + {}^M P_l^e = {}^M A_l^\varphi \cdot {}^M W_0^\varphi + {}^M P_{0-l} \dots\dots\dots (3.12)$$

ここで、

$${}^M W_l^\varphi = \begin{bmatrix} y_l^\varphi \\ \theta_l^\varphi \\ M_l^\varphi \\ S_l^\varphi \end{bmatrix}, \quad {}^M W_0^\varphi = \begin{bmatrix} y_0^\varphi \\ \theta_0^\varphi \\ M_0^\varphi \\ S_0^\varphi \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.13)$$

$${}^M A_l^\varphi = {}^M C_l^\varphi \beta, \quad {}^M P_{0-l} = - {}^M C_l^\varphi \beta {}^M P_0^e + {}^M P_l^e \dots\dots\dots (3.14)$$

$$M C_l^\varphi = \begin{bmatrix} e^{\beta\varphi l} \cos \beta\varphi l & e^{\beta\varphi l} \sin \beta\varphi l & e^{-\beta\varphi l} \cos \beta\varphi l & e^{-\beta\varphi l} \sin \beta\varphi l \\ \beta\varphi e^{\beta\varphi l} \cdot (\cos \beta\varphi l - \sin \beta\varphi l) & \beta\varphi e^{\beta\varphi l} \cdot (\cos \beta\varphi l + \sin \beta\varphi l) & -\beta\varphi e^{-\beta\varphi l} \cdot (\cos \beta\varphi l + \sin \beta\varphi l) & \beta\varphi e^{-\beta\varphi l} \cdot (\cos \beta\varphi l - \sin \beta\varphi l) \\ 2 E_\varphi I \beta_\varphi^2 \cdot e^{\beta\varphi l} \cdot \sin \beta\varphi l & -2 E_\varphi I \beta_\varphi^2 \cdot e^{\beta\varphi l} \cdot \cos \beta\varphi l & -2 E_\varphi I \beta_\varphi^2 \cdot e^{-\beta\varphi l} \cdot \sin \beta\varphi l & 2 E_\varphi I \beta_\varphi^2 \cdot e^{-\beta\varphi l} \cdot \cos \beta\varphi l \\ 2 E_\varphi I \beta_\varphi^3 \cdot e^{\beta\varphi l} \cdot (\cos \beta\varphi l + \sin \beta\varphi l) & -2 E_\varphi I \beta_\varphi^3 \cdot e^{\beta\varphi l} \cdot (\cos \beta\varphi l - \sin \beta\varphi l) & -2 E_\varphi I \beta_\varphi^3 \cdot e^{-\beta\varphi l} \cdot (\cos \beta\varphi l - \sin \beta\varphi l) & -2 E_\varphi I \beta_\varphi^3 \cdot e^{-\beta\varphi l} \cdot (\cos \beta\varphi l + \sin \beta\varphi l) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.15)$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4\beta_\varphi} & 0 & \frac{1}{8E_\varphi I \beta_\varphi^3} \\ 0 & \frac{1}{4\beta_\varphi} & -\frac{1}{4E_\varphi I \beta_\varphi^2} & -\frac{1}{8E_\varphi I \beta_\varphi^3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4\beta_\varphi} & 0 & -\frac{1}{8E_\varphi I \beta_\varphi^3} \\ 0 & \frac{1}{4\beta_\varphi} & \frac{1}{4E_\varphi I \beta_\varphi^2} & -\frac{1}{8E_\varphi I \beta_\varphi^3} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.16)$$

$$M P_0^e = \varphi(t, \tau) \cdot \frac{E_\varphi}{E_\varphi - E_c} \begin{bmatrix} y_0^e - \frac{q_0}{KD} \\ \theta_0^e - \frac{p_0}{KD} \\ M_0^e - E_c I \frac{\alpha T}{h} \\ S_0^e \end{bmatrix}, \quad M P_l^e = \varphi(t, \tau) \cdot \frac{E_\varphi}{E_\varphi - E_c} \begin{bmatrix} y_l^e - \frac{q_0 + p_0 l}{KD} \\ \theta_l^e - \frac{p_0}{KD} \\ M_l^e - E_c I \frac{\alpha T}{h} \\ S_l^e \end{bmatrix} \dots\dots\dots (3.17)$$

である。

3.2 伸縮変形

クリープによって発生する軸力を N_x^e 、これに対する軸方向変位を u_x^e とすれば、微分方程式 (2.16) は次式となる。

$$N_x^e = E_\varphi A \frac{du_x^e}{dx} - \varphi(t, \tau) \cdot E_\varphi A \frac{du_x^e}{dx} \dots\dots\dots (3.18)$$

また、任意点 x における弾性床上の梁部材の微小要素において、軸方向の力の釣合いから、

$$\frac{dN_x^e}{dx} = K D u_x^e \dots\dots\dots (3.19)$$

が得られる。ここで、 K と D はそれぞれ軸方向地盤反力係数と梁部材の周長である。さらに式 (3.18) と

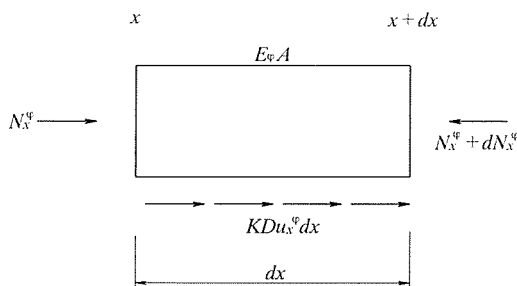


図-2 弾性床上の梁部材の微小要素 (伸縮変形)

(3.19)との関係から、次のような軸方向変位 u_x^e に関する基礎微分方程式が得られる。

$$E_\varphi A \frac{d^2 u_x^e}{dx^2} - K D u_x^e = \varphi(t, \tau) \cdot E_\varphi A \frac{d^2 u_x^e}{dx^2} \dots\dots\dots (3.20)$$

基礎微分方程式 (3.20) は、2次の非斉次線形微分方程式であり、その一般解は前項で述べたように、同式右辺をゼロとした方程式の基本解と一つの特別解の和として求めることができる。すなわち、式(3.20)の一般解は、

$$E_c A \frac{d^2 u_x^e}{dx^2} - K D u_x^e = -(q_0 + p_0 x)$$

であることを考慮して、

$$u_x^e = D_1 \cdot e^{\lambda_\varphi x} + D_2 \cdot e^{-\lambda_\varphi x} + \varphi(t, \tau) \frac{E_\varphi}{E_\varphi - E_c} \left(u_x^e - \frac{q_0 + p_0 x}{K D} \right) \dots\dots\dots (3.21)$$

となる。ここで、 D_1 と D_2 は梁部材両端の状態によって決定される未定積分定数である。また、 q_0 と p_0 はそれぞれ、 $x=0$ における荷重強度と荷重の増加率であり、 λ_φ は次式により計算される。

$$\lambda_\varphi = \sqrt{\frac{K D}{E_\varphi A}} \dots\dots\dots (3.22)$$

式 (3.18) および (3.21) から、クリープによって生じる変位 u_x^e と軸力 N_x^e を求めると次式となる。

◇研究報告◇

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_x^\varphi \\ N_x^\varphi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ E_\varphi A \frac{d}{dx} \end{bmatrix} u_{x+\varphi}(t, \tau) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -E_\varphi A \frac{du_x^\varphi}{dx} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E_\varphi A \lambda_\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_\varphi x} & e^{-\lambda_\varphi x} \\ e^{\lambda_\varphi x} & -e^{-\lambda_\varphi x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \\ &+ \varphi(t, \tau) \cdot \frac{E_\varphi}{E_\varphi - E_c} \\ &\begin{bmatrix} u_x^e - \frac{q_0 + p_0 x}{KD} \\ N_x^e - E_c A \alpha T - E_\varphi A \frac{p_0}{KD} \end{bmatrix} \dots\dots (3.23) \end{aligned}$$

次に $x=0$ での境界条件から式 (3.23) 中の未定積分定数を求めることにする。 $x=0$ での変位量と軸力を、

$$\begin{bmatrix} u_x^\varphi \\ N_x^\varphi \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} u_0^\varphi \\ N_0^\varphi \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_x^e \\ N_x^e \end{bmatrix}_{x=0} = \begin{bmatrix} u_0^e \\ N_0^e \end{bmatrix} \dots\dots (3.24)$$

として式 (3.23) を整理すると、未定積分定数は次のように決定される。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2 E_\varphi A \lambda_\varphi} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2 E_\varphi A \lambda_\varphi} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} u_0^\varphi \\ N_0^\varphi \end{bmatrix} - \varphi(t, \tau) \cdot \right. \\ &\left. \cdot \frac{E_\varphi}{E_\varphi - E_c} \begin{bmatrix} u_0^e - \frac{q_0}{KD} \\ N_0^e - E_c A \alpha T - E_\varphi A \frac{p_0}{KD} \end{bmatrix} \right\} \\ &\dots\dots (3.25) \end{aligned}$$

式 (3.25) を式 (3.23) に代入して整理し、 $x=l$ とすることによって、次式に示す伸縮変形に関する移行式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_l^\varphi \\ N_l^\varphi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_\varphi l} & e^{-\lambda_\varphi l} \\ E_\varphi A \lambda_\varphi e^{\lambda_\varphi l} & -E_\varphi A \lambda_\varphi e^{-\lambda_\varphi l} \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2 E_\varphi A \lambda_\varphi} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2 E_\varphi A \lambda_\varphi} \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} u_0^\varphi \\ N_0^\varphi \end{bmatrix} - \varphi(t, \tau) \cdot \right. \\ &\left. \cdot \frac{E_\varphi}{E_\varphi - E_c} \begin{bmatrix} u_0^e - \frac{q_0}{KD} \\ N_0^e - E_c A \alpha T - E_\varphi A \frac{q_0}{KD} \end{bmatrix} \right\} \\ &+ \varphi(t, \tau) \cdot \frac{E_\varphi}{E_\varphi - E_c} \\ &\cdot \begin{bmatrix} u_l^e - \frac{q_0 + p_0 l}{KD} \\ N_l^e - E_c A \alpha T - E_\varphi A \frac{p_0}{KD} \end{bmatrix} \dots\dots (3.26) \end{aligned}$$

曲げ変形と同様に、式 (3.26) を左辺から右辺にマトリックス単位に順次、以下のように記述する。

$${}^N W_l^\varphi = {}^N C_l^\varphi \lambda \{ {}^N W_0^\varphi - {}^N P_0^e \} + {}^N P_l^\varphi \dots\dots (3.27)$$

式 (3.27) は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} {}^N W_l^\varphi &= {}^N C_l^\varphi \lambda {}^N W_0^\varphi - {}^N C_l^\varphi \lambda {}^N P_0^e + {}^N P_l^\varphi \\ &= {}^N A_l^\varphi \cdot {}^N W_0^\varphi + {}^N P_{0-l}^\varphi \dots\dots (3.28) \end{aligned}$$

ここで、

$${}^N W_l^\varphi = \begin{bmatrix} u_l^\varphi \\ N_l^\varphi \end{bmatrix}, {}^N W_0^\varphi = \begin{bmatrix} u_0^\varphi \\ N_0^\varphi \end{bmatrix} \dots\dots (3.29)$$

$${}^N A_l^\varphi = {}^N C_l^\varphi \lambda, {}^N P_{0-l}^\varphi = -{}^N C_l^\varphi \lambda {}^N P_0^e + {}^N P_l^\varphi \dots\dots (3.30)$$

$${}^N C_l^\varphi = \begin{bmatrix} e^{\lambda_\varphi l} & e^{-\lambda_\varphi l} \\ E_\varphi A \lambda_\varphi e^{\lambda_\varphi l} & -E_\varphi A \lambda_\varphi e^{-\lambda_\varphi l} \end{bmatrix} \dots\dots (3.31)$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2 E_\varphi A \lambda_\varphi} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2 E_\varphi A \lambda_\varphi} \end{bmatrix} \dots\dots (3.32)$$

$$\begin{aligned} {}^N P_0^e &= \varphi(t, \tau) \\ &\cdot \frac{E_\varphi}{E_\varphi - E_c} \begin{bmatrix} u_0^e - \frac{q_0}{KD} \\ N_0^e - E_c A \alpha T - E_\varphi A \frac{p_0}{KD} \end{bmatrix} \\ {}^N P_l^\varphi &= \varphi(t, \tau) \\ &\cdot \frac{E_\varphi}{E_\varphi - E_c} \begin{bmatrix} u_l^e - \frac{q_0 + p_0 l}{KD} \\ N_l^e - E_c A \alpha T - E_\varphi A \frac{p_0}{KD} \end{bmatrix} \\ &\dots\dots (3.33) \end{aligned}$$

である。

3.1 および 3.2 において、第 2 章で誘導した、クリープ解析における曲げ変形および伸縮変形に関する微分方程式を、弾性床上の梁部材に適用し移行式を求めた。曲げ変形に関する移行式 (3.10) または (3.12) ならびに伸縮変形に関する移行式 (3.26) または (3.28) から、

④ クリープに対して、弾性量のほかに持続荷重が荷重として取り込まれる。

⑤ 部材バネの存在によりクリープ現象に時々刻々持続荷重が影響を及ぼすことを示している。

⑥ 部材左端の量が右端の量に及ぼす影響は、弾性解析と全く同じで、弾性件数 E_c と E_φ の違いだけである。

などが特徴としてとらえられる。

また、曲げ変形および伸縮変形の移行式は、弾性解析で用いる移行式と同様の形をしている。したがって、弾性床上の梁部材に関するクリープ解析においても、剛性マトリックスや等価節点力を弾性解析と同様に導くことができる。

3.3 弾性変形が一般の梁部材の場合

前節 3.1 および 3.2 において、弾性床上の梁部材のクリープ挙動の解析方法について述べた。同解析では言うまでもなく、弾性変形時もクリープ進行時ともに弾性床上の梁部材であることを解析の条件にしていた。

ここでは解析条件を少し変えて、弾性変形時が一般の

梁部材である場合のクリープ解析について若干言及する。

(1) 曲げ変形

弾性変形が一般の梁部材となっても、解くべき基礎微分方程式は、3.1の式(3.4)である。3.1においては、式(3.4)の一般解を求めるにあたり、弾性変形時の基礎微分方程式 $E_c I \frac{d^4 y_x^e}{dx^4} + KD y_x^e = q_0 + p_0 x$ を利用した。今、弾性変形は一般の梁部材であるため、同方程式のバネ値は $K=0$ となる。すなわち、式(3.4)の一般解は、 $E_c I \frac{d^4 y_x^e}{dx^4} = q_0 + p_0 x$ であることを考慮して次式となる。

$$y_x^e = C_1 \cdot e^{\beta\varphi x} \cos \beta\varphi x + C_2 \cdot e^{\beta\varphi x} \sin \beta\varphi x + C_3 \cdot e^{-\beta\varphi x} \cos \beta\varphi x + C_4 \cdot e^{-\beta\varphi x} \sin \beta\varphi x + \varphi(t, \tau) \cdot \frac{E_\varphi}{E_c} \left(\frac{q_0 + p_0 x}{KD} \right) \dots\dots\dots (3.34)$$

たわみ y_x^e が求めれば、以降の手続きは3.1と全く同様にして、曲げ変形に関する移行式を導くことができる。

(2) 伸縮変形

前記した曲げ変形と同様な考え方で、基礎微分方程式(3.20)の一般解を求めることができる。すなわち、式(3.20)の一般解は、弾性変形時の基礎微分方程式 $E_c A \frac{d^2 u_x^e}{dx^2} - KD u_x^e = -(q_0 + p_0 x)$ のバネ値が $K=0$ であることから、 $E_c A \frac{d^2 u_x^e}{dx^2} = -(q_0 + p_0 x)$ であることを考慮して次式となる。

$$u_x^e = D_1 \cdot e^{\lambda\varphi x} + D_2 \cdot e^{-\lambda\varphi x} + \varphi(t, \tau) \cdot \frac{E_\varphi}{E_c} \left(\frac{q_0 + p_0 x}{KD} \right) \dots\dots\dots (3.35)$$

軸方向変位 u_x^e が求めれば、以降の手続きは3.2と全く同様にして、伸縮変形に関する移行式を導くことができる。

以上、第2章と第3章ではコンクリート構造物のクリープ解析の微分方程式と弾性床上の梁部材への適用について述べた。この考え方の妥当性を検証するために、次章に簡単な計算例を示すことにする。

4. 計算例

4.1 弾性床上の単純梁

図-3に示した弾性床上の単純梁について、クリープによって生じる t_∞ 時点における梁部材中央のたわみと曲げモーメントおよび支点反力を求めることにする。

[計算条件]

両端を単純支持された弾性床上の梁部材に材令 $\tau=7$ 日で持続荷重 $w=50 \text{ tf/m}$ を作用させる。梁部材の断面2次モーメントは $I=1 \text{ m}^4$ 、弾性係数は $E_c=2.5 \times 10^6 \text{ tf/}$

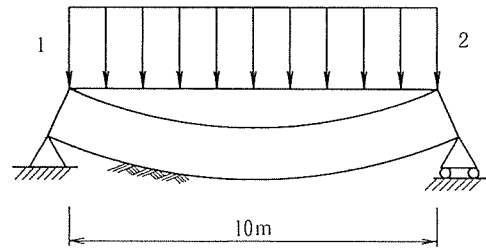


図-3 単純梁の計算例

m^2 とし、バネ定数は作用幅を考慮して $KD=673 \text{ tf/m}^2$ とする。また基準フロー値は $\varphi_{f0}=2.0$ 、有効部材厚は $d_w=40 \text{ cm}$ とする。

[計算結果]

曲げ変形に関する移行式(3.10)または(3.12)をプログラム化して求めた梁部材中央のたわみ、曲げモーメントおよび左端反力の計算結果は次のとおりである。このとき、 $\varphi(\infty, 7)=2.645$ 、 $\rho(\infty, 7)=0.7701$ である。

$$y_{x=5.0} = 6.180 \text{ (mm)}$$

$$M_{x=5.0} = -42.30 \text{ (tfm)}$$

$$R = -13.32 \text{ (tf)}$$

この計算結果を従来の方法(文献6)の方法をプログラム化し、分布バネを節点バネに置き換えて計算と比較する。節点バネへの置換えは、分布バネを5,10,20および40分割した4ケースとした。

計算結果を表-1に、図-4, 5および6に比較結果を示す。従来の方は、分割数40の付近で各図ともほぼ収束している。本方法で求めた値は、たわみ、曲げモーメントおよび反力ともに分割数40の値とよく一致している。

表-1 節点バネモデルによる計算結果

		5等分	10等分	20等分	40等分
中央点	たわみ (mm)	5,803	6,168	6,179	6,180
	曲げモーメント (tfm)	-45.86	-43.22	-42.46	-42.33
支点1の反力 (tf)		-15.12	-13.83	-13.45	-13.35

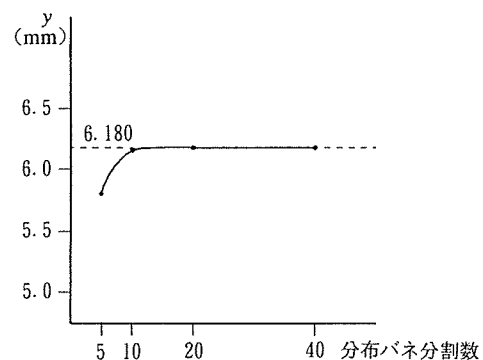


図-4 中央点のたわみ (y)

◇研究報告◇

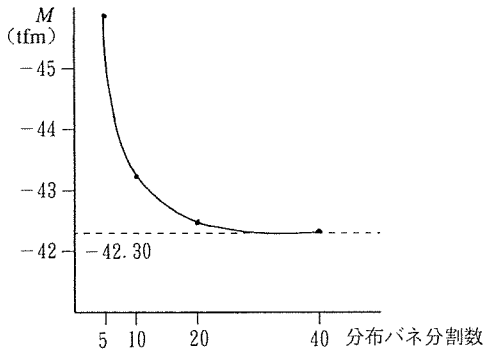


図-5 中央点の曲げモーメント (M)

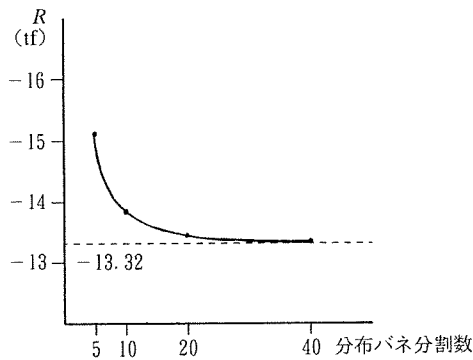


図-6 支点1の反力 (R)

4.2 弾性床上の片持ち梁

図-7に示した片持ち梁を用いて、計算条件を2つ設定し、それぞれの計算から得られる節点2の軸方向変位 u_2 と節点1の軸力 N_1 を比較する。なお、クリープ係数と材令係数は、4.1の値を用いて、 $\varphi(\infty, 7) = 2.645$ 、 $\rho(\infty, 7) = 0.7701$ とする。

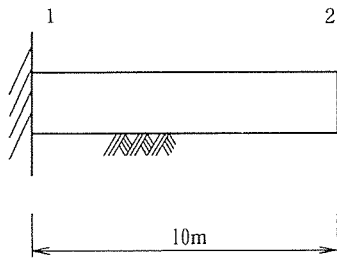


図-7 片持ち梁の計算例

〔計算条件1〕

弾性床上の片持ち梁に温度変化 $T_x = 26.45^\circ\text{C}$ を与え、弾性解析を行う。このとき梁部材の断面積は $A = 1\text{ m}^2$ 、弾性係数は $E_c = 2.5 \times 10^6 / [1 + \rho(\infty, 7) \cdot \varphi(\infty, 7)] = 8.233 \times 10^5\text{ tf/m}^2$ 、線膨張係数は $\alpha = 1.0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ とし、分布バネ値は作用幅を考慮して $KD = 673\text{ tf/m}^2$ とする。

〔計算条件2〕

一般の梁部材からなる片持ち梁に温度変化 $T_x = 10^\circ\text{C}$ を与え、弾性的に変位が生じた後に、分布バネ支持し

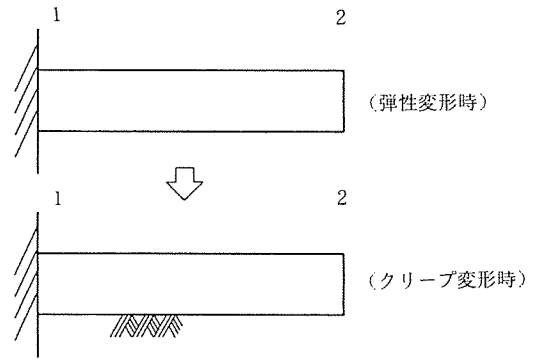


図-8 片持ち梁の計算条件

り、クリープ変形させる (図-8)。このとき梁部材の断面積は $A = 1\text{ m}^2$ 、弾性係数は $E_c = 2.5 \times 10^6\text{ tf/m}^2$ 、線膨張係数は $\alpha = 1.0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ とし、分布バネ値は作用幅を考慮して $KD = 673\text{ tf/m}^2$ とする。

プログラムを用いて求めた、計算条件1および2の計算結果を表-2にまとめて示す。今回設定した計算条件では、クリープの性質および弾性解析における温度の性質から考えて、両者の結果は一致しなければならない。同表より、各条件における軸方向変位 u_2 と軸力 N_1 が一致することが確認できる。

表-2 条件1,2の計算結果

	計算条件1 (弾性計算)	計算条件2 (クリープ計算)
節点2の変位 u_2 (mm)	-2.575	-2.575
節点1の軸力 N_1 (tf)	8.606	8.606

5. おわりに

本報告では、クリープ挙動の微分方程式とそれを用いた弾性床上のコンクリート構造物のクリープ解析について論じた。解析にあたっては、まず、クリープ進行時にコンクリート部材が満たすべき微分方程式を考察し、これより弾性床上の梁部材に関する基礎微分方程式を誘導した。そして、同方程式を解き移行式を求め、計算例を用いてその妥当性を検証し、概ね良好な結果を得た。

本文中でも述べたとおり、弾性床上の梁部材に関するクリープ解析用の移行式は、弾性解析用の移行式と同形式であり、これより変位法に展開していくことができる。この結果、一般の梁部材および弾性床上の梁部材について、変位法によるコンクリート構造物のクリープ解析が可能となった。

弾性床上のコンクリート部材の場合、クリープ解析は、一般の梁部材に比べてかなり複雑な解析式になるが、プログラムを作成して電子計算機を利用すれば、この問題は解決できる。

今後、構造物の大深度化により、PC 構造の適用場面も多くなることが予想され、本報告が、地盤と地下構造物の相互作用の解析に多少なりとも役立てば幸いである。

参 考 文 献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・コンクリート橋編，平成2年2月
- 2) 泉，近藤ほか：共立数学公式・付函数表，共立出版
- 3) 吉田俊弥：構造力学，朝倉書店
- 4) D. Schade：Alterungsbeiwerte für das Kriechen

von Beton nach den Spannbetonrichtlinien, Beton und Stahlbetonbau, Heft 5, 1977

- 5) 若狭忠雄訳：プレストレストコンクリート指針によるコンクリートのクリープに対する変化係数について，プレストレストコンクリート，Vol. 21, No. 5, 1979
- 6) 佐藤，渡辺，佐藤：変位法によるコンクリート構造物のクリープ・乾燥収縮解析の基礎理論，プレストレストコンクリート，Vol. 22, No. 2, 1980
- 7) (社)日本コンクリート工学協会：プレストレストコンクリートの利用性追求研究委員会報告書，1991年7月

【1993年5月6日受付】

◀刊行物案内▶

第 29 回 研 究 発 表 会 講 演 概 要

体 裁：B5判 116頁

頒布価格：3 000 円（送料：350 円）

内 容：(1) プレストレストコンクリート部材の累加最大曲げ耐力について，(2) プレストレストコンクリート梁と鉄骨柱との接合法に関する基礎実験，(3) プレストレスト鉄骨鉄筋コンクリート梁部材の曲げ強度について，(4) アウトケーブルを用いたはりの支持点の力学的性状試験，(5) 高強度鉄筋を用いてプレストレスを導入した格子状変厚プレキャスト板に関する実験的研究，(6) プレストレスト鉄筋コンクリート合成断面部材の応力計算，(7) 新綾部大橋実橋載荷試験について，(8) 大反力ゴム支承を用いた PC 多径間連続橋の振動試験，(9) PC 鋼材突起定着部の設計手法に関する一考察（その1），(10) PC 鋼材突起定着部の設計手法に関する一考察（その2），(11) 生口橋 PC 桁部の設計，(12) 3%食塩水における PC 鋼より線の応力腐食割れ試験，(13) PC 板埋設型枠を用いた合成床スラブの多数回繰返し載荷実験，(14) プレキャスト PC 版を用いた床版打替工法用スラブ止めの実験，(15) PC 合成床版の耐火性について，(16) ポストテンション方式による PC 舗装版の摩擦低減試験およびジャッキアップ試験，(17) 沈下したプレキャストコンクリート舗装版のリフトアップ工法の開発，(18) ロックアンカーを用いた片持ち式ロックシェッドの載荷試験について，(19) 合成アーチ巻立て工法による城址橋の施工，(20) 三井野原ループ6号橋の施工，(21) 現場製作ケーブルを用いた PC 斜張橋（上妻橋）の施工，(22) 横浜博覧会「海のパビリオン」H.M.S. の設計と施工，(23) 横浜新道（拡幅）藤塚工事に伴う PC フレームアンカー工事，(24) プレキャストブロックによる PC 耐圧板工事，(25) 国道115号横向1号橋の設計と施工について，(26) 吊床版橋の設計施工と振動実験—鳥山城カントリークラブ歩道橋—，(27) 新十勝大橋（仮称）の設計と施工，(28) プレキャストPCタンクの設計・施工，(29) 牛滝川橋の設計と施工，(30) 製紙用 PC タンクの設計について