第1回　FEMを利用しよう

講師：関口　和彦[*1]・中井　章裕[*2]

はじめに

土木・建築の設計に携わる人で，FEM（有限要素法）を利用したことはなくとも，その名称を聞いたことのある人は大勢いらっしゃると思います。今回は，これからFEMを利用した解析に取り組もうとする設計者を対象に全6回の講座を設け，FEM解析の簡単な例題の説明からやや複雑なPC構造物でのFEM解析の利用法や設計への応用等について説明を行います。

1．FEMとは何でしょう

コンピュータがない時代には，梁理論を駆使して構造物の解析を行っていましたが，コンピュータの発達とともに解析も変位法による骨組解析に推移していきました。しかしながら，近年の複雑な構造物への対応には骨組解析では限界があり，更なるコンピュータの発達により，曲面を有する連続体やコンクリートと鋼材の複合構造物，地盤を考慮した構造物などの解析においてFEMを利用することにより容易に解を得られるようになりました。FEMは解析すべき構造物をできるだけ実態に近似させるため，対象構造物を小さな部分に分割し（モデル化），それを全体的に組み立てて解析していく方法です。また，工学的にモデルを近似させて解を得る方法なので解も近似になります。したがって，粗いモデル化では高精度の近似解は得られません。

15年以上前から，FEMは解析手法として本格的に利用されはじめ，現在では設計の中にも幅広く取り入れられています。したがって，これから設計に携わっていくであろう皆さんにとって，FEM解析は避けて通れないものになってきていると言えます。FEM解析の歴史等については，いろいろな先生方の書かれている参考書に記述されているので，ここではあえて述べません。

現在，FEMはPCケーブルの定着部の解析や少数主桁の検討，マスコンクリートなどの解析にも利用されています。近年のコンピュータの発達は目を見張るものがあり，ほんの10年前では考えられないような節点数が10万点以上のモデルも数時間で解析ができるようになってきました。また，FEMによる非線形解析も日常的に行われています。今回の講座ではFEMを用いた線形静的解析に的を絞っていますが，機会があれば非線形解析等についても簡単に触れていきたいと思います。構造解析を行うにあたり，現在考えられるメニューは図-1のとおりです。

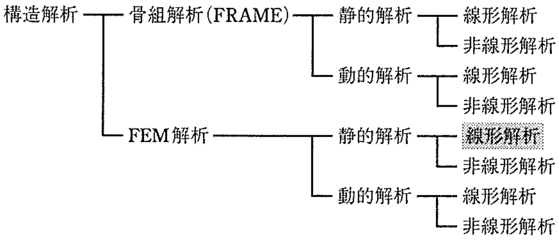


図-1　構造解析メニュー

とりあえず，さわりは以上にしてさっそく本題に入りたいと思います。

2．FEMに使う要素

FEM解析を行う際，使用する要素には大きく分けて次のような種類があります。

① 骨組要素
② 2次元要素
③ 3次元要素

今回は②，③について説明します。

2.1 2次元要素

2次元要素とは，図-2に示すような（独立した）4つの節点，もしくは3つの節点で構成された板要素をいいます。解析モデルは，この2つの板要素を組み合わせて作成します。図-3に解析モデルの例を示します。

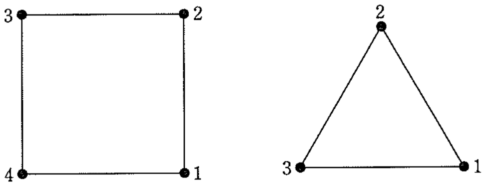
2次元要素は，その用途によって表-1のように大別されます。

2次元要素の座標系（x，y，z）においては，独立した節点は次の6つの自由度をもっています。

x軸方向，y軸方向，z軸方向
x軸まわり，y軸まわり，z軸まわり

節点が要素を構成すると，その節点の自由度は表-1のように要素の特性に依存するようになり，平面ひずみ要素，平

[*1] *Kazuhiko SEKIGUCHI*：日本電子計算㈱ 科学技術事業部 建設技術システム部構造解析グループ グループマネージャー
[*2] *Akihiro NAKAI*：日本電子計算㈱ 科学技術事業部 建設技術システム部構造解析グループ



（a）四角形板要素　（b）三角形板要素

図-2　2次元要素

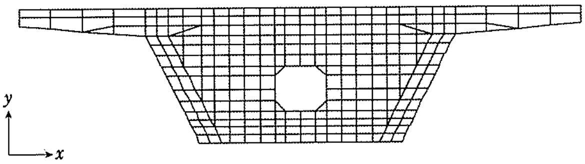
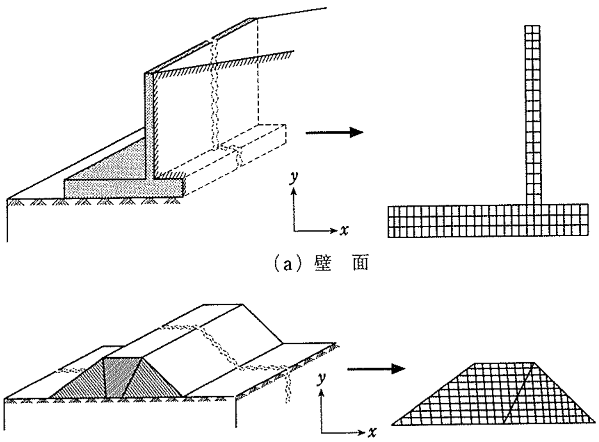


図-3．解析モデルの一例（PC箱桁中間横桁部）



（a）壁　面

（b）アースダム（重力ダム）

図-5　平面ひずみ要素を用いた解析モデル

表-1　2次元要素の分類

分　類	用　途	自由度*					
		x軸方向	y軸方向	z軸方向	x軸まわり	y軸まわり	z軸まわり
平面ひずみ要素	面　内	○	○	×	×	×	×
平面応力要素	面　内	○	○	×	×	×	×
板曲げ要素	面　外	×	×	○	○	○	×
シェル要素	面内＋面外	○	○	○	○	○	×

○：自由度あり　×：自由度なし

＊自由度とは図-4に示す座標系上において，要素を構成する節点が移動できる方向（座標成分）を意味します。

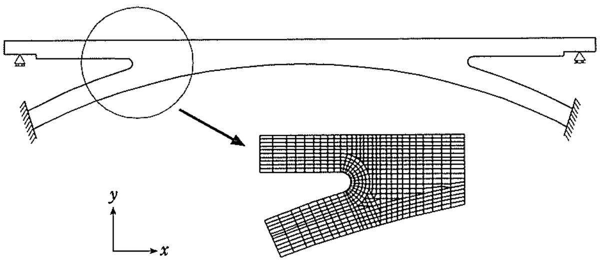


図-6　平面応力要素を用いた解析モデル

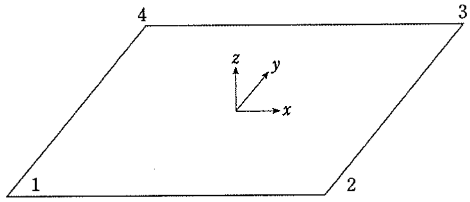


図-4　2次元要素の座標系

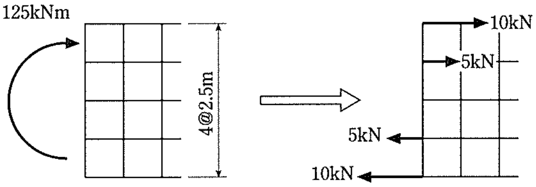


図-7　曲げモーメントから偶力への変換例

面応力要素を構成する節点の自由度はx軸方向，y軸方向となります。板曲げ要素を構成する節点の自由度はz軸方向，x軸まわり，y軸まわりとなります。また，シェル要素の自由度は平面応力要素と板曲げ要素を併せたものになります。

(1)　**平面ひずみ要素**

平面ひずみ要素は，図-5(a)，(b)に示すような奥行きにある程度の長さを有し，なおかつ一定の断面をもった構造物の解析をする場合に用いられます。

(2)　**平面応力要素**

平面応力要素は，図-6のような有限な板厚をもつ構造物を解析する場合に用いられます。平面ひずみ要素・平面応力要素ともに，作用させられる荷重は面内荷重のみです。一方，面内曲げの自由度はもっていないため，面内に作用する曲げモーメントは考慮できず，図-7のように偶力に変換して作用させる必要があります。

平面応力要素での応力の算出式は，次式のようになります。

$$\sigma=\frac{N}{A}$$

ここで，N：発生断面力（軸力）

　　　A：断面積

ただし，ここでいう断面積とは要素の面積ではなく，次式に示すものを断面積と称しています。

$$A=t\times b$$

ここで，t　：板厚

　　　b　：単位幅（1.0m）

以上の2式より，平面ひずみ要素および平面応力要素において板厚を1.0mとすると，次式に示すように，発生断面力（軸力）が応力となります。

$$\sigma=\frac{N}{A}=\frac{N}{t\times b}=\frac{N}{1.0\times1.0}=N$$

(3)　**板曲げ要素**

板曲げ要素は，図-8のように平面解析で面外に荷重が作用するようなケースなど，部材断面力を算出したい場合に用いられます。板曲げ要素では，力の成分として面内力とともに面外力が発生します。

$$\sigma=\pm\frac{M}{Z}$$

ここで，M：発生断面力（曲げモーメント）

　　　Z：断面係数

ただし，ここでいう断面係数とは要素の断面係数ではなく，次式に示すものを断面係数と称しています。

$$Z=\frac{I}{y}$$

ここで，y ：板厚中心からの距離（上縁$=\frac{t}{2}$，下縁$=-\frac{t}{2}$）

I ：断面2次モーメント（$=\frac{bt^3}{12}$）

b ：単位幅(1.0 m)

t ：板厚

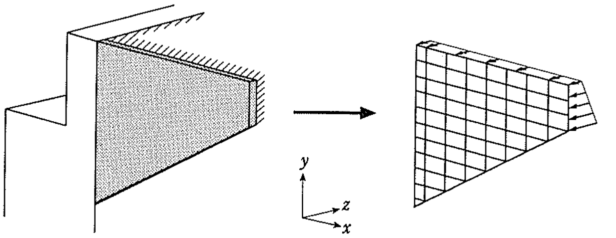


図 - 8　板曲げ要素を用いた解析モデル

(4)　シェル要素

シェル要素は，平面応力要素と板曲げ要素を組み合わせることによって3次元的効果を表現するための要素のことをいいます。図 - 9に示すモデルはその一例です。シェル要素の応力の算出式は，次式のようになります。

$$\sigma=\frac{N}{A}\pm\frac{M}{Z}$$

面内力　面外力

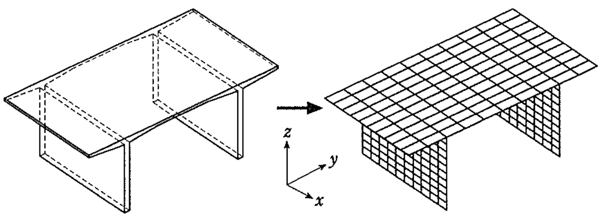


図 - 9　シェル要素を用いた解析モデル

2.2 3次元要素

3次元要素は，柱頭部・定着部などの局部的な解析をしたい場合や，図 - 10に示すように対象構造物を忠実に再現したい場合などに用います。また，3次元要素では2次元要素とは異なり，応力度のみ算出されます。

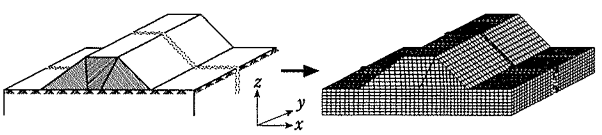


図 - 10　3次元要素を用いた解析モデル

表 - 2　FEM解析によって算出される項目

要素の種類	軸　力	曲げモーメント	主応力	直応力	変　位
平面ひずみ要素	○	×	○	○	○
平面応力要素	○	×	○	○	○
板曲げ要素	×	○	○	○	○
シェル要素	○	○	○	○	○
3次元要素	×	×	○	○	○

注）ほかにもいろいろ算出されますが，とくによく使われる項目を抜粋しました。

3. FEM解析をやってみよう

3.1 片持ち梁におけるFEM解析

先にも述べたように，FEMの要素（モデル）にはいくつかの種類があり，同一の構造を解析してもそれぞれの出力結果が異なってきます。ここでは，図 - 11に示すような片持ち梁をモデル化し，下記に示す解析方法での結果について比較します。また，公式による解を正解値として比較の基準とします。

比較に用いる解析方法

- 骨組解析
- FEM解析
  - 平面応力要素
  - 板曲げ要素
  - 3次元要素

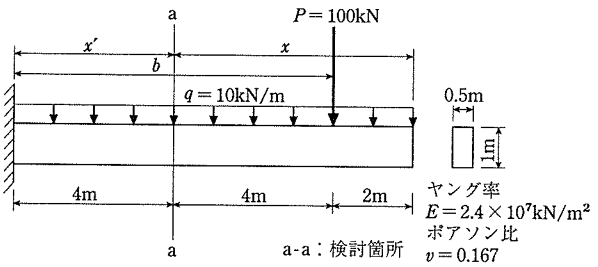


図 - 11　形 状 図

(1)　モデルによる解の違い

①　公式による解

この片持ち梁の検討箇所における曲げモーメントの式は，公式によると，

集中荷重　$M=-P(b-x')$

分布荷重　$M=-\frac{q}{2}x^2$

合　計　$M=-P(b-x')-\frac{q}{2}x^2$

断面a - a 上では $b=8$ m，$x=6$ m，$x'=4$ mなので，これを上式に代入すると曲げモーメントは，$M=-580.000$ kNmとなります。

②　骨組解析による解

骨組解析では，図 - 12に示すようなモデル化を行います。諸条件を入力して解析を実行すると，リスト形式で結果が出力されます。また，形式は使用する解析プログラムによって多少異なったものになります。

一般的には，表 - 3のように各節点における曲げモーメントが計算され出力されます。いま，骨組で作成したモデルでは節点番号17番に着目していますので，曲げモーメントが$M=-580.00$kNmということが分かります。

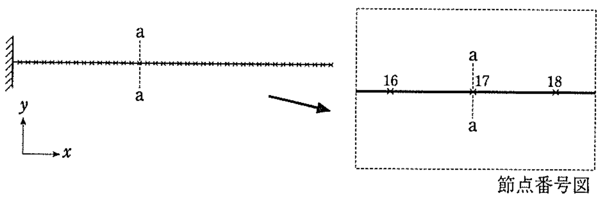


図 - 12　モデル図

表 - 3　骨組解析の出力結果

部材の節点番号	距離 (m)	モーメント (kN.m)	せん断力 (kN)	軸力 (kN)
14- 15	.000	-702.81	167.50	.00
15- 14	.250	-661.25	165.00	.00
15- 16	.000	-661.25	165.00	.00
16- 15	.250	-620.31	162.50	.00
16- 17	.000	-620.31	162.50	.00
17- 16	.250	-580.00	160.00	.00
17- 18	.000	-580.00	160.00	.00
18- 17	.250	-540.31	157.50	.00
18- 19	.000	-540.31	157.50	.00
19- 18	.250	-501.25	155.00	.00

③　FEM解析における解

(a)　平面応力要素による解

平面応力要素では，2次元（面内）でモデル化します。入力に必要なものは，節点座標，要素の定義，材料定数，板厚（0.5 m），拘束条件，荷重と用意するものは骨組解析とほとんど変わりません。骨組と異なるポイントは，剛度を求める必要がないところです。また，出力される結果は要素重心の場合が多いので，図 - 13のように着目する断面上に要素の重心がくるようにモデルを作成する必要があります。

先にも述べたように，平面応力要素は面内荷重のみを考慮するので，断面上の曲げモーメントを直接出力することはできません。このため，まず着目断面上の各要素の応力値を出力して，その分布形状から曲げモーメントを算出するという方法をとります。

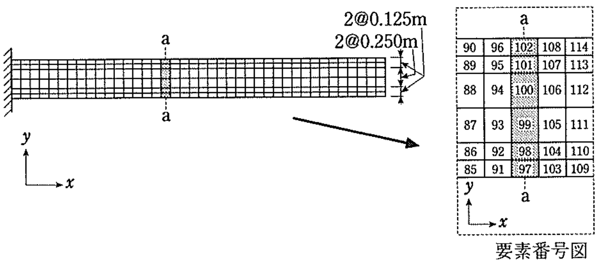


図 - 13　モデル図

表 - 4が，FEM解析の出力結果です。NORMAL - Xの項に各要素の軸方向の応力値（引張りを正とする）が出力されます。モデルを作成するとき，y軸方向には6つの要素を作りましたので，断面a - a上では6点の応力値を求めることができました。この応力値を補間することで，皆さんがよく見慣れた断面力図を作成することができます（図 - 14）。

矩形断面の曲げモーメント－応力関係式は$\sigma_x = M \times y_0 / I$です。FEM解析によって断面 a - a上の6点の応力値σ_xが求まり，梁の断面2次モーメントIと，それぞれの軸心からの距離y_0も既知です。したがって，これらの値を上式に代入して得られた結果を平均すれば，断面 a - aでの曲げモーメント$M = -579.493$kNmが求められます。

算出例：要素番号102（図 - 14）

$y_0 = -0.4375$m

表 - 4　FEM解析の出力結果

S T R E S S E S　I N　Q U A D R I L A T

ELEMENT STRESSES

ID.		FIBRE DIST	NORMAL-X	NORMAL-Y	SHEA
95	BOT	-2.500000E-1	4.564689E+3	-1.897684E+1	-2.930
	TOP	2.500000E-1	4.564689E+3	-1.897684E+1	-2.930
96	BOT	-2.500000E-1	6.386861E+3	-2.114095E+1	-1.114
	TOP	2.500000E-1	6.386861E+3	-2.114095E+1	-1.114
97	BOT	-2.500000E-1	-6.081936E+3	-3.797294E-1	-1.096
	TOP	2.500000E-1	-6.081936E+3	-3.797294E-1	-1.096
98	BOT	-2.500000E-1	-4.346582E+3	-1.956312E+0	-2.897
	TOP	2.500000E-1	-4.346582E+3	-1.956312E+0	-2.897
99	BOT	-2.500000E-1	-1.739104E+3	-6.547106E+0	-4.403
	TOP	2.500000E-1	-1.739104E+3	-6.547106E+0	-4.403
100	BOT	-2.500000E-1	1.739104E+3	-1.345298E+1	-4.403
	TOP	2.500000E-1	1.739104E+3	-1.345298E+1	-4.403
101	BOT	-2.500000E-1	4.346582E+3	-1.804384E+1	-2.897
	TOP	2.500000E-1	4.346582E+3	-1.804384E+1	-2.897
102	BOT	-2.500000E-1	6.081935E+3	-1.962055E+1	-1.096
	TOP	2.500000E-1	6.081935E+3	-1.962055E+1	-1.096
103	BOT	-2.500000E-1	-5.780686E+3	-1.866563E+0	-1.089
	TOP	2.500000E-1	-5.780686E+3	-1.866563E+0	-1.089
104	BOT	-2.500000E-1	-4.131112E+3	-2.861288E+0	-2.864

ID：要素番号

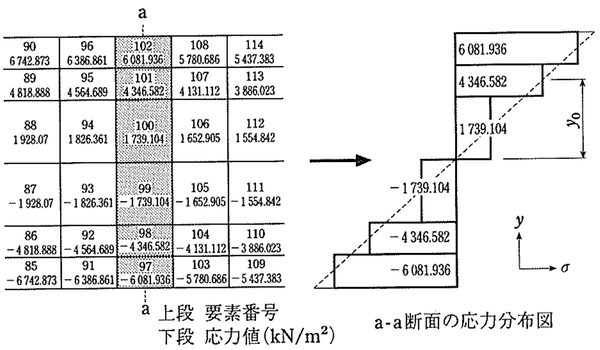


図 - 14　解析結果

$\sigma_x = 6\ 081.935$ kN/m^2

$$M = \frac{\sigma_x}{y_0} \times I = \frac{6\ 081.935}{-0.4375} \times \frac{0.5 \times 1.0^3}{12} = -579.232 \text{ kNm}$$

(b)　板曲げ要素による解

板曲げ要素は，荷重が面外に作用すると考えて図 - 15のようにモデル化します。これを板曲げ解析と呼び，この方法を用いると断面a - aの曲げモーメントを直接出力することができます。入力項目は板厚を1.0mとする以外，(a)とほぼ同じです。

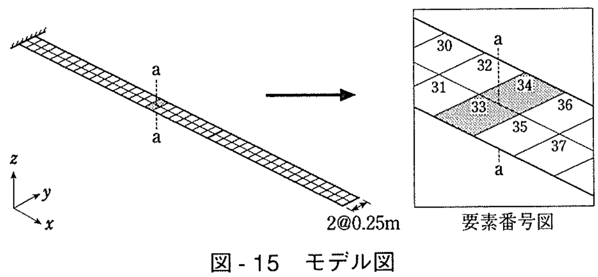


図 - 15　モデル図

表 - 5が結果のリストです。板曲げ要素では，MXの項がy軸まわりの曲げモーメントで，単位長さあたりの値が出力されます。a - a断面上には要素が2つあるので，得られた値に要素の奥行き長さ0.25mを乗じ，合計すれば$M = -580.035$ kNmを得ることができます。

表 - 5　FEM解析の出力結果

```
                    F O R C E S   I N   Q U A D R I L A

                 - BENDING  MOMENTS -
ID          MX             MY             MXY
 30   -1.286133E+3   3.054322E-1   -3.053372E-1     -3.27
 31   -1.218250E+3   2.752987E-1    2.592306E-1     -3.23
 32   -1.218250E+3   2.752987E-1   -2.592306E-1     -3.23
 33   -1.160069E+3   1.456513E-2    3.719960E-1     -3.20
 34   -1.160069E+3   1.456513E-2   -3.719960E-1     -3.20
 35   -1.102591E+3  -2.394685E-1    2.516357E-1     -3.16
 36   -1.102591E+3  -2.394685E-1   -2.516357E-1     -3.16
 37   -1.037139E+3  -2.543237E-1    2.892808E-1     -3.12
```

(c)　3 次元要素による解

3 次元要素でモデルを作成した場合（図 - 16）も，曲げモーメントを直接出力することはできないので，(a)と同様に応力値から算出する方法をとります（図 - 17）。表 - 6が結果のリストです。

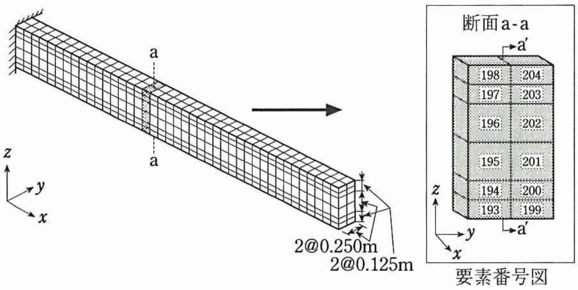


図 - 16　モデル図

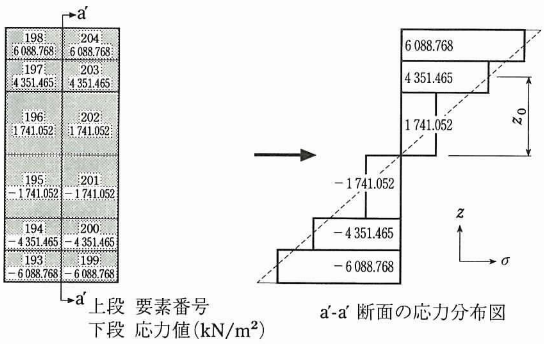


図 - 17　解析結果

表 - 6　FEM解析の出力結果

```
                    S T R E S S E S   I N   H E X A H E D R O N   S O L

                         -CENTER AND CORNER POINT STRESSES-
                         NORMAL                SHEAR                  PRINCIPAL
193
   CENTER    X  -6.088768E+3   XY   2.984505E+0   A   8.787370E-1 LX
             Y   1.546697E-1   YZ  -3.029462E-2   B  -6.090740E+3 LY
             Z  -3.693787E-1   ZX  -1.095604E+2   C   8.787370E-1 LZ
194
   CENTER    X  -4.351465E+3   XY   6.580643E-1   A   1.729726E+1 LX
             Y   1.176787E-1   YZ  -6.429434E-2   B  -4.370710E+3 LY
             Z  -1.948044E+0   ZX  -2.899572E+2   C   1.171005E-1 LZ
195
   CENTER    X  -1.741052E+3   XY   1.733641E-1   A   9.879741E+1 LX
             Y   7.622213E-2   YZ   6.459500E-3   B  -1.846394E+3 LY
             Z  -6.543959E+0   ZX  -4.402411E+2   C   7.622605E-2 LZ
196
   CENTER    X   1.741052E+3   XY  -1.733641E-1   A   1.845321E+3 LX
             Y  -7.622232E-2   YZ   6.459426E-3   B  -1.177248E+2 LY
             Z  -1.345606E+1   ZX  -4.402411E+2   C  -7.622838E-2 LZ
197
   CENTER    X   4.351465E+3   XY  -6.580645E-1   A   4.370623E+3 LX
             Y  -1.176786E-1   YZ  -6.429417E-2   B  -3.720959E+1 LY
             Z  -1.805196E+1   ZX  -2.899573E+2   C  -1.174642E-1 LZ
198
   CENTER    X   6.088768E+3   XY  -2.984506E+0   A   6.090733E+3 LX
             Y  -1.546687E-1   YZ  -3.029486E-2   B  -2.159540E+1 LY
             Z  -1.963062E+1   ZX  -1.095604E+2   C  -1.558025E-1 LZ
```

3次元要素による解析では，各要素の重心における軸方向の応力値がNORMALの項のCENTER Xに出力されます。このモデルでは奥行き方向に要素を 2 つずつ作成しましたので，これらの平均の値が a - a 断面上の中心軸 a' - a' の応力値となり，曲げモーメント－応力関係式を用いると$M=-580.143$ kNmが求まります。

(2)　結果の比較

では，それぞれの解法による結果を比較してみましょう。

表 - 7を見て分かるように，モデル化の方法によって曲げモーメントの値に若干のばらつきが生じます。このように，FEM解析で得られる解は近似値となります。今回は，単純な片持ち梁を取り扱ったために，どの要素においてもほぼ同様な結果が得られました。しかし，使用できる要素にも得手不得手があるので，複雑な構造物のモデル化時の要素選択は，FEM解析における重要なポイントの一つとなります。

表 - 7　解析方法と精度の関係

解析方法	曲げモーメント(kNm)	精　度
正 解 値	－580.000	－
骨組解析	－580.000	1.00000
平面応力要素	－579.956	0.99913
板曲げ要素	－580.035	1.00006
3 次元要素	－580.607	1.00025

(3)　図 化 処 理

FEM解析プログラムには，図化処理機能を備えたものもあり，解析結果の全体の傾向を見たい場合などに利用します。平面応力解析における着目点付近の軸方向応力矢線図を図 - 18に示します。図 - 19は等高線図（コンター図）と

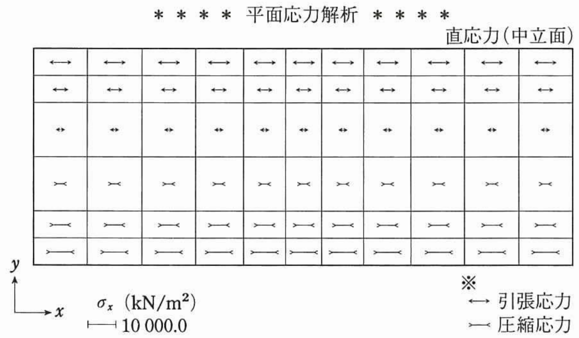


図 - 18　応力矢線図

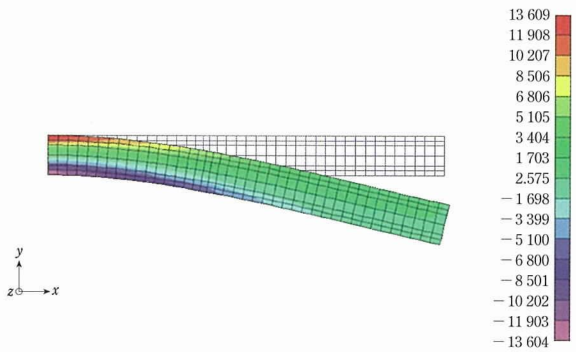


図 - 19　変形および軸方向応力コンター図

いい，曲げモーメントや応力値を成分として描画することができます。この図では，要素の変形と軸方向応力のコンター図を同時に表しています。

3.2 ちょっと複雑な構造におけるFEM解析

ちょっと複雑なFEM解析を行うモデルとして，橋台のウィングを取り上げます。ウィングは板形状の構造物であり，主に背面からの土圧を支える役割を果たしています。ウィングの断面力については簡易的な計算式が提案されており，各部分の曲げモーメント・せん断力を算出することができます。ここで，図-20のウィング拘束部における各着目点（A'～D）の曲げモーメントをFEMを利用して求め，簡易式の結果と比較してみます（解析方法は板曲げ解析）。

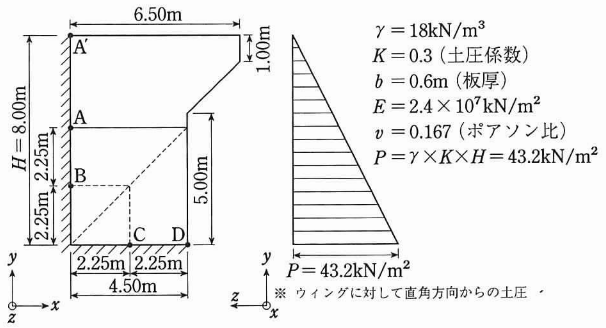


図-20　ウィング形状図

(1) FEM解析による結果

まず，図-21のような板要素にモデル化してみましょう。諸条件を入力し解析を実行すると，各要素ごとの曲げモーメントが求められます。曲げモーメントは x 軸まわりと y 軸まわりに発生します。図化処理機能を利用してそれぞれのモーメントの分布図を描くと図-22，23のようになります。

(2) 結果の比較

簡易法によって求められた曲げモーメント M と，FEM解析によって求められた曲げモーメント M とを比較してみると表-8のようになります。この表より，結果に大きな差が生じていることが分かります。

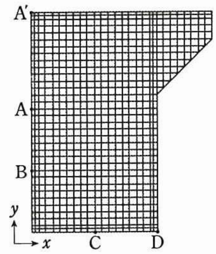


図-21　ウィングモデル図

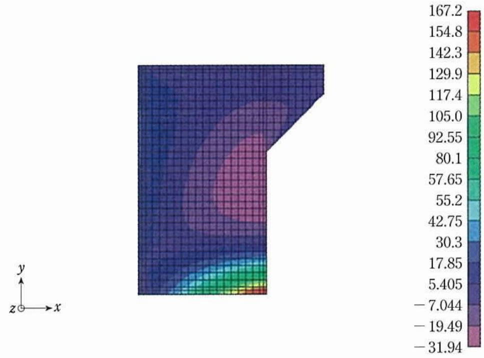


図-22　x 軸まわりのモーメント分布図

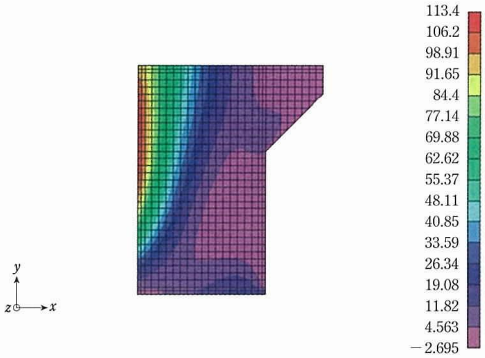


図-23　y 軸まわりのモーメント分布図

表-8　簡易法とFEMの曲げモーメントの比較

	A'	A	B	C	D
FEM　M (kNm)	99.87	111.25	69.78	78.17	167.24
簡易法 M (kNm)	111.87	138.73	47.84	68.34	197.67
比　率	1.12	1.25	0.69	0.87	1.18

ウィングのような変則的な構造物にも，簡易的な計算方法がありますが，やはり正確な値を求めることは困難なことのようです。また，照査したい構造物がより複雑になれば，簡易的な計算方法に適合しない場合もあります。構造物を小さな要素の集合体と考えるFEM解析は，このような特殊な構造物や，とくに一般的な計算式がない複雑な構造物を照査するときにこそ，威力を発揮すると言えるでしょう。

【2000年11月29日受付】