

橋梁の解析技術

小宮 正久*

1. まえがき

構造解析とは、構造物の供用性や安全性の検討に必要な構造物の応答（断面力、断面応力度、変形等）を求めることをいう。

構造解析は、設計の段階（予備設計、詳細設計等）、構造形式、検討しようとしている状態（施工中、供用中および終局状態）、構造材料（鋼、コンクリートおよび両者の組合せ）等に応じて適切に行う必要がある。

一般に、構造解析は、まず解析理論を決定し、次にその解析理論に適合するように荷重と構造をモデル化して実施される。場合によっては、解析理論の不完全さを補完するために、複数の解析理論を用いることもある。構造解析は、実際の構造挙動とできるだけ近い挙動が得られるように実施しなければならない。しかしながら、設計には他の部分にも不確定要素があるので、構造解析だけを精密に実施しても無意味である。以下、コンクリート橋の解析技術の基本的な事項について説明する。

2. 構造解析理論

2.1 解析理論一般

解析理論は、次のように大別することができる。

- ① 材料の応力-ひずみ関係による分類
 - 弾性理論……応力-ひずみ関係を線形とする理論
 - 非弾性理論…応力-ひずみ関係を非線形とする理論
- ② 変形による2次効果（幾何的非線形）による分類
 - 1次理論…幾何的非線形を無視する理論
 - 2次理論…幾何的非線形を考慮する理論
- ③ 荷重作用と構造物の応答特性による分類
 - 静的解析…荷重作用の動的特性と構造物の動的応答特性を無視した解析
 - 動的解析…荷重作用の動的特性と構造物の動的応答特性を考慮した解析
- ④ 経時応力解析
コンクリートのクリープ、乾燥収縮等のひずみの時間

依存性を考慮する解析

以上の解析理論は、相互に関係している。弾性1次理論による解析を線形解析、それ以外の弾性または非弾性理論と2次理論を組み合わせた解析を非線形解析という。また、静的および動的解析は、それぞれ線形解析と非線形解析で構成される。経時応力解析は、ひび割れの影響を考慮するか否かによって、非線形解析と線形解析に分類される。

これらの解析は、一般に以下に示す解析方法を利用し実施される。

- 応力法 (Force Method)
- 変位法 (Displacement Method)
- 混合法 (Mixed Method)

2.2 応力法 (Force Method)

反力や断面力を未知量とする釣合い方程式（弾性方程式）を解いて、反力や断面力を求める解析手法が応力法である。応力法には、図-1に示すように構造物を静定基本系に置き換え、解を求める古典的手法（3連モーメント法がその代表例である）と部材のたわみ性マトリックス（剛性マトリックスの逆マトリックスに相当する）を用いる部材たわみ性マトリックス法の2つがある。

前者は、比較的簡単な構造物を手計算で解くのに便利な方法であり、後者は、複雑な構造物の解析に用いられる。構造系を静定基本系に置き換える古典的手法は、設計における各種の問題を解くのに応用できるので、設計者の素養として身につけておくことがよいと考える。

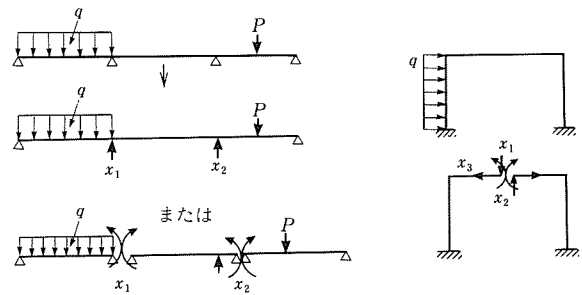


図-1 構造系の基本静定系への置換の例

2.3 変位法 (Displacement Method)

変位法は、コンピュータの発達とともに発展普及した応力法に代わる現在最も汎用的な解析法である。ラーメン構造に多用されるたわみ角法も変位法の一様である。一般に、骨組解析に用いる変位法をマトリックス変位法、板や厚さをもつ立体構造等を離散化モデルを用いて解析する変位法を有限要素法 (Finite Element Method : FEM) といっている。

変位法では、構造物を図-2に示すような有限要素の集



* Masahisa KOMIYA

(株)日本構造橋梁研究所

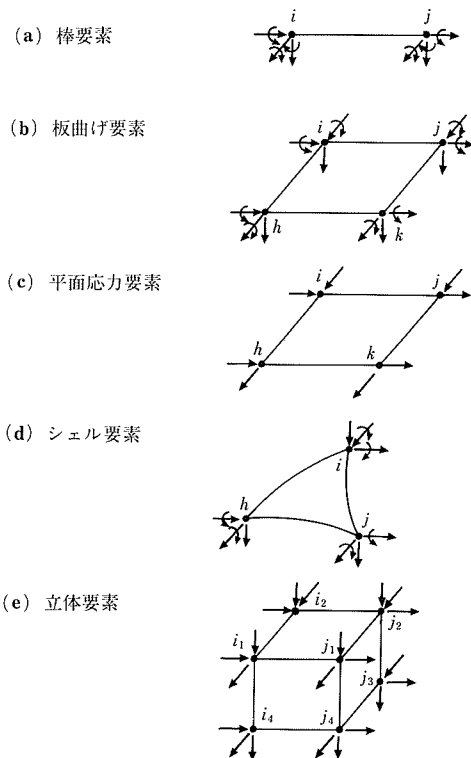


図-2 変位法における代表的な有限要素¹⁾

合体として解析する。

2.4 混合法 (Mixed Method)

応力法と変位法の未知量である力と変位の両者を未知量として解析する方法を混合法という。混合法の解析法の一つが伝達マトリックス法 (Transfer Matrix Method) であり、直列型構造の解析に有効な方法である。変位と力を混合した状態ベクトルを構造物の左端から右端に順次伝達し、右端の境界条件を利用して左端の状態ベクトルを求めることにより解析する。この中間の状態ベクトルを構成するマトリックスを伝達マトリックスという。

2.5 その他の解析法

現在、構造解析は、ほとんどすべてコンピュータを使って行われるが、ほんの20年前は、下記に示すような方法に

より手計算により行われていた。

(1) コンクリート床版橋

床版橋は、版理論 (薄板理論) により等方性版または異方性版と仮定して解析するが、一般の設計では、等方性版の場合 Olsen-Reinitzuber, Pucher, Homberg, M. Rush らが作成した影響線図を用いて曲げモーメントを求める。また、異方性版については、Guyon-Massonnet-Bareš の影響線が主として用いられる。図-3にPucherによる四辺単純支持版の影響線図の例を示す。

(2) 格子桁橋

各主桁が分担する荷重の割合を荷重分配係数 (Load Distribution Factor) という。この荷重分配係数を Guyon-Massonnet-Bareš, Leonhardt - Homberg らの影響線を利用して定め、各主桁の荷重の平均分担率 (全荷重 / 主桁本数) にこの値を乗じて、反力や断面力を求める。

(3) モーメント分配法 (Moment Distribution Method)

たわみ角法における多元連立節点方程式を解く代わりに、繰返し数値計算により部材端モーメントを求める解析法であり、Kani, Cross らによる方法が有名である。節点間を固定梁と仮定して得られる材端モーメントが節点において釣り合うように節点に集まる部材の剛比に応じて分配する。図-4に計算例を示す。

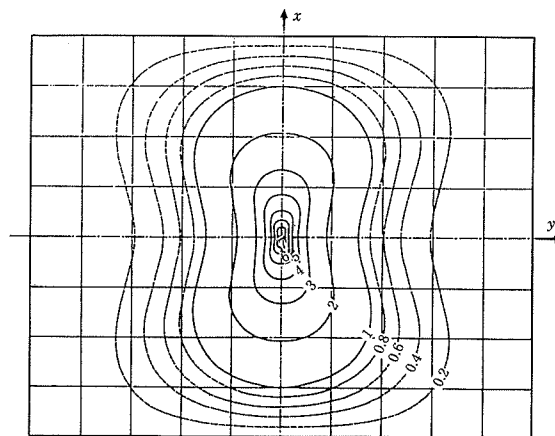
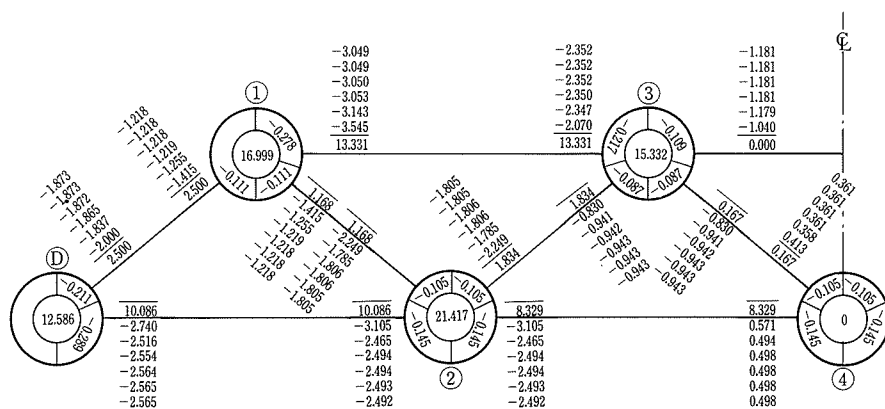


図-3 Pucherによる単純支持版の影響線図²⁾



・部材端モーメントの計算

- $M_{01} = 2.500 - 2 \times 1.873 - 1.218 = -2.464 \text{ t}\cdot\text{m}$
- $M_{10} = 2.500 - 2 \times 1.218 - 1.873 = 1.809 \text{ t}\cdot\text{m}$
- $M_{02} = 10.086 - 2 \times 2.565 - 2.492 = 2.464 \text{ t}\cdot\text{m}$
- $M_{12} = 1.168 - 2 \times 1.218 - 1.805 = -3.073 \text{ t}\cdot\text{m}$
- $M_{13} = 13.331 - 2 \times 3.049 - 2.352 = 4.881 \text{ t}\cdot\text{m}$
- $M_{31} = 13.331 - 2 \times 2.352 - 3.049 = 5.578 \text{ t}\cdot\text{m}$
- $M_{23} = 1.834 - 2 \times 1.805 - 0.943 = -2.719 \text{ t}\cdot\text{m}$
- $M_{32} = 1.834 - 2 \times 0.943 - 1.805 = -1.857 \text{ t}\cdot\text{m}$
- $M_{24} = 8.329 - 2 \times 2.492 - 0.498 = 3.843 \text{ t}\cdot\text{m}$
- $M_{42} = 8.329 - 2 \times 0.498 - 2.492 = 6.833 \text{ t}\cdot\text{m}$
- $M_{21} = 1.168 - 2 \times 1.805 - 1.218 = -3.660 \text{ t}\cdot\text{m}$
- $M_{31} = 0.167 - 2 \times 0.943 - 0.361 = -1.358 \text{ t}\cdot\text{m}$
- $M_{43} = 1.167 - 2 \times 0.361 - 0.943 = 0.054 \text{ t}\cdot\text{m}$
- $M_{35} = 0 - 2 \times 1.181 - 0 = -2.362 \text{ t}\cdot\text{m}$

図-4 Kani法による分配計算結果

3. 構造解析モデル

3.1 構造系のモデル化

構造解析にあたり、構造物をモデルに置き換える必要がある。モデル化は、図-2に示すような要素を用い、実際の構造物の挙動を忠実に再現できるように行わなければならない。構造物に生ずる断面力には、軸力、曲げモーメント、せん断力、単純および反りねじりモーメントがある。構造部材の特性に応じて必要な断面力が求められるようにモデル化しなければならない。たとえば、大きなねじりを受ける開断面の鋼部材のように反りねじりを考慮する必要がある場合には、反りが考慮できるようにモデル化しなければならない。

また、構造物は、一般に平面骨組構造に置き換えて解析することが多いが、平面構造に置き換えることの妥当性について十分検討する必要がある。とくに、コンクリート構造の場合には、断面が厚肉版で構成される部材を梁に置き換えることになるので、十分な注意が必要である(3.4項を参照)。一般に、構造モデルは、部材図心を結んだ軸線で構成されるが、この軸線も実際の構造挙動と一致するように選定しなければならない。

通常、連続桁の場合、梁の図心軸を骨組の軸線に選び、その軸上の節点を直接支承で支持するモデルが用いられている。このようなモデルの妥当性を検討するために、図-5に示すケースについて計算した結果を表-1に示す。

この表より、中間支承を固定する場合には、慣用モデルは不適切であることが明らかである。ラーメン形モデル(モデル2)は、ここで、比較したすべての支承条件において、FEM解析結果とよく一致している。したがって、連続桁の骨組モデルとしては、ラーメン形モデルを用いるべきであることが明らかである。

このように、実際には厚さをもつ部材を棒要素に置き換える場合には、厚さの影響が正しく反映されるように配慮する必要がある。構造力学で仮定している構造モデルを単純に設計に持ち込むようなことをしてはならない。

コンクリート部材の断面剛性は、一般に断面に配置した鋼材の影響を無視したコンクリート全断面を有効として計算されるが、鋼材の影響やひび割れの影響を考慮すると、この仮定と大きく異なることもある。次のような場合には、断面剛性の仮定にも十分な配慮が必要である。

- ① 大きな地震力を受けるため、大量に配筋された橋脚をもつPCラーメン構造の常時および地震時における橋脚の剛性評価
- ② 供用時にひび割れの発生するRCまたはPPC部材とひび割れの発生しない鋼またはPC部材を一体化した構造の各部材剛性の評価、RCアーチにおけるアーチリングと他の部材の剛性評価
- ③ 鋼、コンクリート複合構造の供用時および終局時の剛性評価

3.2 支承のモデル化

支承は、支承の機能、構造に応じて適切にモデル化する必要がある。とくに、可動方向が明確な支承構造(例：ピン支承、ローラー支承)を斜橋や曲線橋に適用する場合には注意が必要である(図-6)。

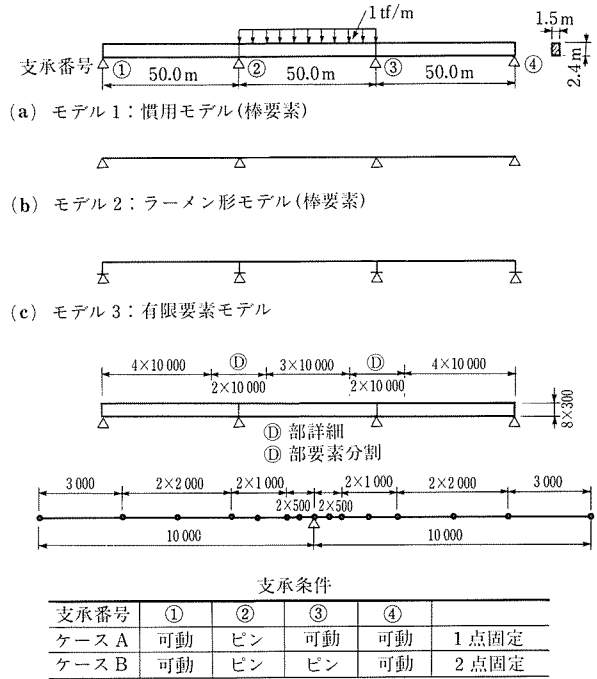


図-5 解析モデル

表-1 曲げモーメントの比較結果

	ケース A			ケース B		
	②左*1	②右*1	中 央 径 間 中 央	②左*1	②右*1	中 央 径 間 中 央
モデル 1	-124.4 (1.041)	-118.8 (1.041)	187.5 (1.072)	-124.4 (2.108)	-118.8 (0.772)	187.5 (1.402)
モデル 2	-124.4 (1.041)	-118.8 (1.041)	187.5 (1.072)	-56.8 (0.963)	-164.2 (1.067)	142.0 (1.062)
モデル 3	-119.5 (1.000)	-114.1 (1.000)	174.9 (1.000)	-59.0 (1.000)	-153.9 (1.000)	133.7 (1.000)

*1: FEM解析と断面を一致させるために、中間支点位置より0.25m離れた断面を中間支点断面と表現している。左は中間支点の側径間側、右は中央径間側を示す。
*2: () 数字は、モデル3を1とするときの各モデルの曲げモーメントの比率を示す。

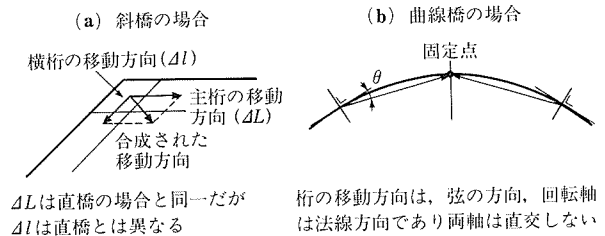


図-6 斜橋、曲線橋と直橋の相違点

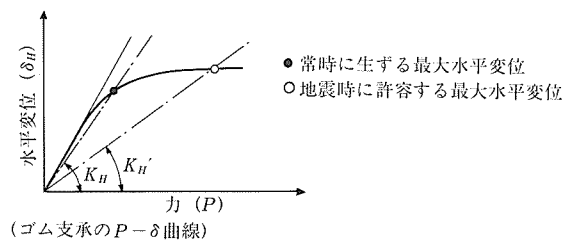


図-7 常時と地震時の水平せん断ばね定数の相違

ゴム支承の水平せん断ばね機能を地震力の分散に利用する場合、常時と地震時では、ゴム支承の水平せん断ばね定数を変えなければならない(図-7)。

3.3 基礎構造と地盤のモデル化

基礎構造も一体となって荷重を支持するラーメン橋のような構造系においては、基礎構造および地盤も構造モデルに取り入れなければならない。基礎構造および地盤は、図-8のようにモデル化される。ばね定数は、土の不確かさを反映させ変動させるのがよい。

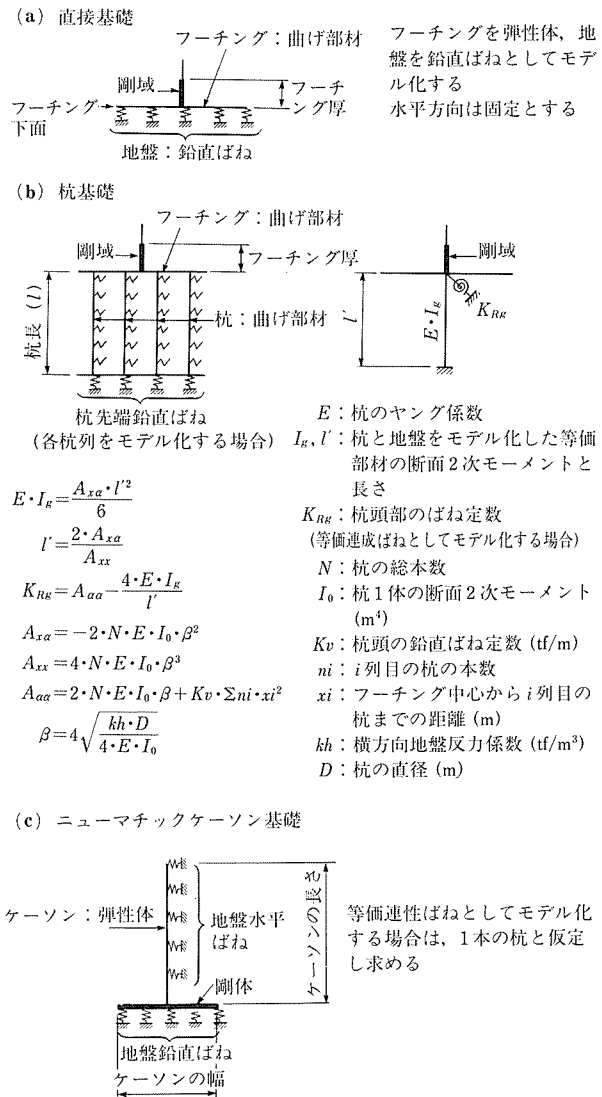


図-8 基礎構造および地盤のモデル化

3.4 荷重のモデル化

荷重は、荷重の分布状態を単純化したり、動的荷重を静的荷重に置き換えるなど、実際の荷重作用と等価または安全側の結果が得られるようにモデル化している。

公開されている解析プログラムを利用する場合、設計者が等分布荷重や節点間の作用荷重として入力したつもりであっても、プログラムの中では節点荷重に置き換えられて取り扱われていることもあるので、プログラムの内容についてあらかじめ知っておくことが重要である。

たとえば、多主桁構造を格子構造として解析する場合、図-9に示すような載荷方法が考えられ、節点間の断面力には差が生じることもあるので、注意が必要である。とく

に、斜橋の場合には十分な注意が必要である。

また、輪荷重を集中荷重として取り扱うか、部分分布荷重として取り扱うかで断面力および分布には差が生ずるので、注意が必要である(図-10)。

部材の一部を取り出して構造の細部を解析する場合、切断面には、その断面に作用している断面力を作用させる必要がある。この断面力を集中的に作用させるか、あるいは応力度として作用させるかは、荷重の伝達機構、解析目的等に応じて適切に選定する必要がある。

また、この場合、切断した構造が不安定にならぬよう、断面力の数値を調整しなければならない。図-11に、ラーメン橋の柱頭部を解析する場合の例を示す。

部材にプレストレス力が導入されている場合、プレストレスは、外力として取り扱う。外力は、以下に示す2つの方法により求めることができる。

- 方法1：定着端の集中荷重および偏向部の腹圧力として評価する方法

この方法において、プレストレス力は、定着端の集中荷重および偏向部の腹圧力に対する部分分布荷重として取り扱われる(図-12)。この方法による場合、必ず断面図心軸を結ぶ線を構造線に選び、力の釣合い条件 ($\sum H=0, \sum V=0, \sum M=0,$) を満足するように外力の値を設定しな

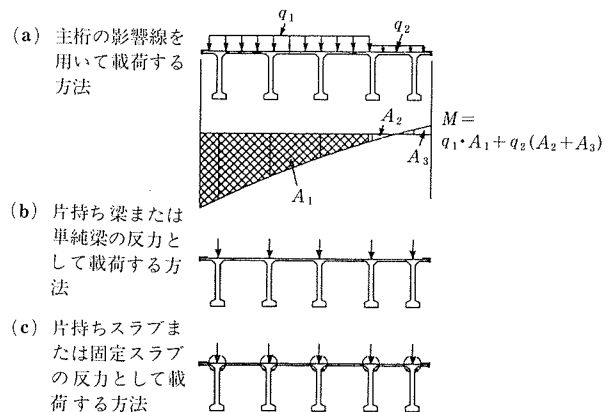


図-9 格子構造への載荷例

- (a) 集中荷重
- (b) 接地幅内の部分分布荷重
- (c) 床版中心まで拡散することを仮定した部分分布荷重

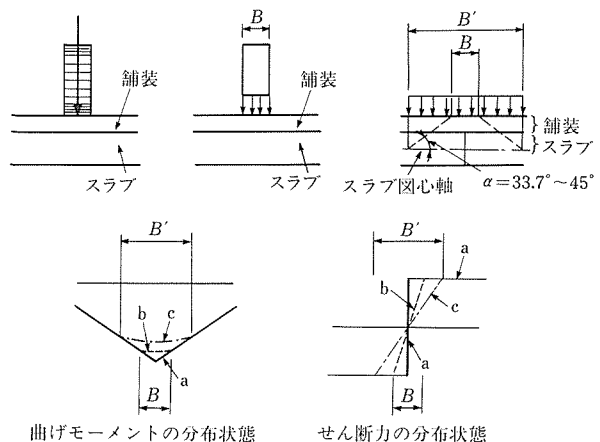


図-10 部分分布荷重の取扱いの例

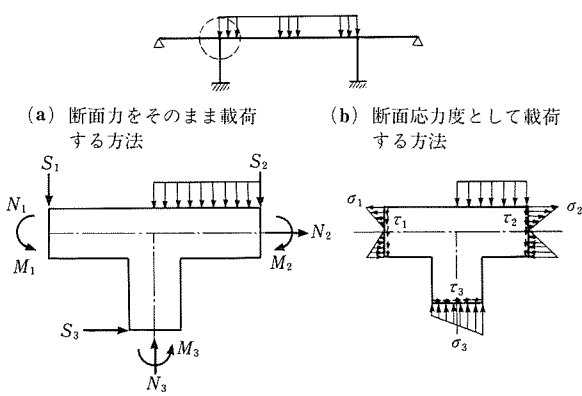


図-11 部材解析モデルへの荷重载荷の例

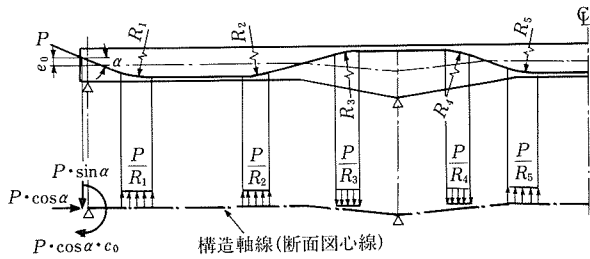


図-12 プレストレス力の外力への置換え

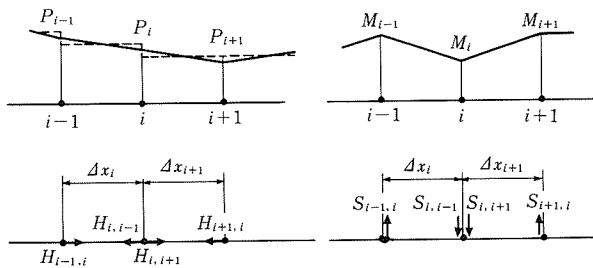


図-13 プレストレス力と外力の関係

なければならない。

- 方法2：節点に作用する断面力を外力として節点に载荷する方法

次の手順により、プレストレス力による断面力（水平力、鉛直力およびモーメント荷重）を求め、各節点に载荷する（図-13）。

$$\text{水平方向荷重作用} : H_{pi} = -\frac{1}{2}(P_{i-1} + P_i) + \frac{1}{2}(P_i + P_{i+1})$$

$$\text{鉛直方向荷重作用} : V_{pi} = \frac{M_i - M_{i-1}}{\Delta x_i} + \frac{M_i - M_{i+1}}{\Delta x_{i+1}}$$

$$\text{モーメント荷重} : M_i = -M_{i-1} + M_{i+1}$$

4. 格子理論の適用における留意点

コンクリート橋の場合、床版橋、多主桁橋、多室箱桁橋等、各種の構造の解析に格子理論が幅広く適用されている。

コンクリート橋の断面は、版が立体的に組み合わされて構成されており、断面を構成する版要素は相互に剛に結合されている。このような断面をもつ構造を棒要素の集合体に置き換えて解析するのは、正しい方法とは言えない。にもかかわらず、格子理論が多用されているのは、コン

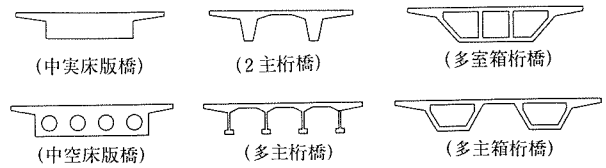


図-14 格子理論が利用されている断面形状の例

ピュータの演算能力が十分でなく、有限要素解析プログラムが十分に普及していなかったため、格子理論よりも適切な実用的な方法がなかった時代の残滓と思われる。

変位法による構造解析法が一般化し、コンピュータの能力が飛躍的に向上した現代においては、有限要素法等を適切に幅広く利用するべきであるが、残念ながら解析理論の主流は、格子理論である。以下、格子理論を構造解析に適用する場合の留意点、問題点等について示す。

4.1 橋軸方向部材（主桁）の剛性

橋軸方向部材（主桁）の剛性（軸、曲げおよびねじり剛性）は、その総合計が橋全体の断面の剛性と一致するように決定しなければならない。

断面が片持ちスラブをもつ場合、片持ちスラブを剛性の小さな主桁として評価するか、単に主桁に荷重を伝達する役割の部材とするかについては、片持ちスラブと他の部分との剛比等を考慮して判断しなければならない。主桁剛性は、橋軸に対し直角な断面の形状を用いて計算しなければならない。

4.2 橋軸直角方向部材（横桁）の剛性

橋軸直角方向部材（横桁）の剛性の評価については、定法がない。中実断面の床版橋の場合は、橋軸直角方向の断面においても平面保持則が成立しているとの仮定に基づいて、全断面有効として求めた分割要素個々について計算した剛性を用いている。中空床版橋や箱桁橋の場合には、確

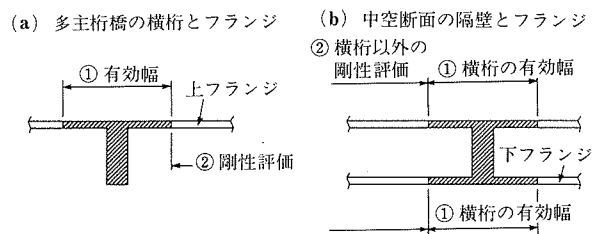


図-15 横桁の剛性の評価における判断事項

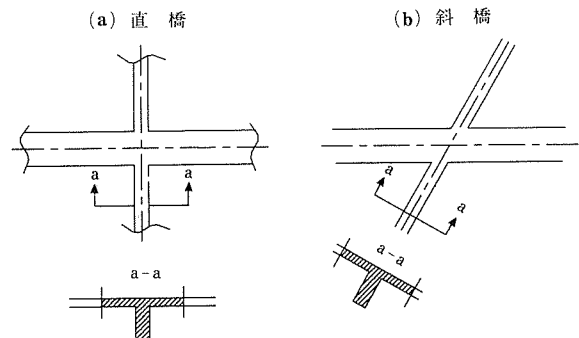
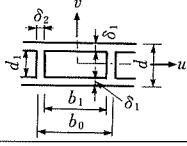
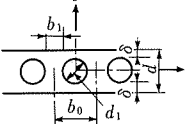
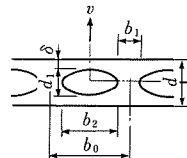
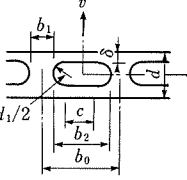
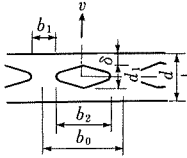


図-16 部材断面の選定

表-2 各種断面における単位長さあたりの曲げ剛性³⁾

断面	ρ_P	ρ_E
	$E \frac{(b_0 d^3 - b_1 d_1^3)}{12 b_0}$	$\rho_E = \rho_P$
	$E \frac{(b_0 d^3 - 0.59 d_1^4)}{12 b_0}$	$\frac{E b_0 d^2 (d - 2f)^*}{32 \left[\left(1 - \frac{3f}{d}\right) \frac{b_1}{2} + \int_0^{\frac{d_1}{2}} \frac{d^2 - 3df - 2d \sqrt{\frac{d_1^2}{4} - u^2}}{(d - 2\sqrt{\frac{d_1^2}{4} - u^2})^2} du \right]}$
	$E \frac{(b_0 d^3 - 0.59 b_2 d_1^4)}{12 b_0}$	$\frac{E b_0 d^2 (d - 2f)^*}{32 \left[\left(1 - \frac{3f}{d}\right) \frac{b_1}{2} + \int_0^{\frac{b_2}{2}} \frac{d^2 - 3df - dd_1 \sqrt{1 - \frac{4u^2}{b_2^2}}}{(d - d_1 \sqrt{1 - \frac{4u^2}{b_2^2}})^2} du \right]}$
	$E \frac{(b_0 d^3 - c d_1^3 - 0.59 d_1^4)}{12 b_0}$	$\frac{E b_0 d^2 (d - 2f)^*}{32 \left[\left(1 - \frac{3f}{d}\right) \frac{b_1}{2} + (2\delta - 3f) \frac{cd}{8\delta^2} + \int_{\frac{c}{2}}^{\frac{b_2}{2}} \frac{d^2 - 3df - 2d \sqrt{\frac{d_1^2}{4} - \left(u - \frac{c}{2}\right)^2}}{\left[d - 2\sqrt{\frac{d_1^2}{4} - \left(u - \frac{c}{2}\right)^2}\right]^2} du \right]}$
	$E \frac{\left[b_0 d^3 - 16 \int_0^{\frac{b_2}{2}} [v(u)]^3 du \right]}{12 b_0}$	$\frac{E b_0 d^2 (d - 2f)^*}{32 \left[\left(1 - \frac{3f}{d}\right) \frac{b_1}{2} + \int_0^{\frac{b_2}{2}} \frac{d_1^2 - 3df - 2dv(u)}{[d - 2v(u)]^2} du \right]}$

注) ρ_P : 主桁の曲げ剛性
 ρ_E : 横桁の曲げ剛性

かではない。横桁の剛性は、以下の点について判断し決定する必要がある。

- ① 横桁、隔壁の配置されている上・下フランジ有効幅の評価
- ② 横桁、隔壁間のフランジの剛性の評価
- ③ 主桁と横桁断面の図心軸の差についての評価 (図-15)。

横桁の剛性は、部材軸に直角な断面を用いて計算しなければならない (図-16)。

表-2は、Guyon - Massonnet - Bareš による単位幅あたりの主桁と横桁の曲げ剛性 (ρ_P および ρ_E) の計算式である。これらも、参考にするるとよいであろう。

4.3 斜橋における横桁の配置方法

斜橋における横桁の配置法としては、次の2つの方法が考えられる (図-17)。

(1) 斜角に平行に配置する方法

一般に、主桁の変形のはほぼ等しい位置を結ぶことになるので、主桁、横桁の断面力の分布は素直である。

(2) 斜角とは関係なく橋軸に直角に配置する方法

一般に、主桁の変形の異なる位置を結ぶので、主桁、横

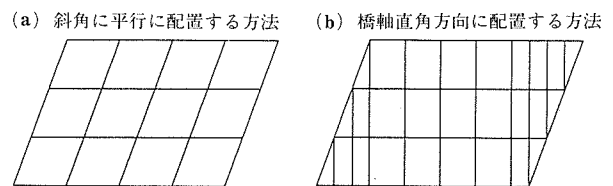


図-17 斜橋における横桁の配置方法

桁の断面力分布が急変することがある。

荷重が上・下フランジの曲げで主桁および横桁に伝えられるであろうことを考慮すると、横桁または隔壁の間の横桁は、荷重の伝達距離が最短となるように橋軸に直角に配置するのが正しいと考えられる。斜橋の場合は、複数のモデルを比較して最終モデルを決定するか、FEM解析によるべきである。

5. コンクリート構造の非線形解析法⁴⁾

5.1 コンクリート構造における非線形解析の必要性

従来のRCおよびPC構造に加え、プレストレスを導入し、なお、ひび割れの発生を許すPPC構造の採用が増加しつつある。PPC構造は、RC構造とPC構造のひび割れやたわみなどの供用時の挙動をより合理的に改善することを目的とした

新しい構造であり、両構造の中間的な挙動を示す。したがって、PPC構造によって構成される部材や断面は、構造全体にわたり均一的にひび割れの発生するRC構造や、ひび割れの発生しないPC構造とは異なり、ひび割れの発生する部材(断面)とひび割れの発生しない部材(断面)が混在する。一般に、RC構造およびPC構造の構造解析は、ひび割れの有無が均一的であるため、コンクリート全断面についての剛性を用いて行われている。この手法をそのままPPC構造、とくにPPC不静定構造に適用するについては、問題のないことを確認する必要がある。

PC不静定構造における常識的な温度変化、乾燥収縮、クリープ、プレストレスなどの強制変形の影響は、終局時においては無視してよいとする考え方と無視せずに考慮する考え方があり、この問題の取扱いに関する世界的なコンセンサスは、現在に至っても得られているとは言えない。構造物が完全塑性を備えていれば強制変形による断面力は破壊には関与しないが、構造物に完全塑性を付与することは现阶段では不明確な点が多く困難であり、終局時において強制変形の影響をいかに取り扱うべきかを明らかにすることは、コンクリート構造物の設計においては重要な問題である。

最近、プレキャストセグメント工法の発展に伴い、同工法のもつ省力化、軽量化、経済性などの利点をより一層高めることを目的として、PC緊張材を部材の外側に配置してプレストレスを導入する外ケーブル方式が採用される傾向にある。従来の内ケーブル方式PC構造は、部材内部にPC緊張材を配置してグラウトを行うことにより、コンクリートとPC鋼材間に付着を与えている。しかしながら、外ケーブル方式PC構造の場合は、コンクリートとPC鋼材間に付着がないため、供用および終局状態の挙動を通常の曲げ理論によって解析することはできない。エクストラドーズドPC橋やPC斜張橋は、この外ケーブルをより効果的に利用した構造系であるが、これらの構造の終局時の構造解析を桁橋と同様に線形解析によって問題なしとして良いか否か疑問である。

以上に述べた事項を明らかにするためには、非線形解析による検討が必要である。

また、近年、コンクリート斜張橋の支間長は、ますます増大し、非常にフレキシブルになっている。このような長大かつフレキシブルな構造の設計に線形解析を適用して問題ないかの確認、タワーの安定性についての検討などは、非線形解析による必要がある。さらに、波形ウェブ橋や混合橋等の複合構造に対する終局状態の検討は、当然、非線形解析によるべきである。

5.2 非線形解析の適用における留意事項

非線形解析を実際に行う場合には、次の事項に留意して行うのがよい。

- ① PC2 径間連続桁およびRC固定アーチの実験結果と非線形結果を比較し、繰返し荷重を受ける場合や鉄筋降伏後においては、ひび割れ間のコンクリートと鉄筋の付着が破壊され、テンションスティフニング効果は、失われることを確認している。鉄筋降伏以降のテンションスティフニング効果は無視する場合には、繰返

し荷重の影響は、無視することができる。

- ② 非線形解析結果に影響を与える要因について検討し、次のような結論を得た。

- ひび割れ発生後の曲率は、CEBマニュアルの曲率によってもBransonの有効断面2次モーメントによっても同等の解が得られる。一般的には、直接曲率が求められるCEBマニュアルの計算式を用いるのが便利である。
- 橋軸方向の要素分割数は、2～3種類の分割数を比較して慎重に決めるべきである。一般には、部材高さを基準にして15～20分割すればほぼ妥当な解が得られるものと判断される。
- コンクリートの応力-ひずみ曲線は、終局荷重の大きさには影響するが、破壊に至るまでの曲げ挙動には影響しない。終局荷重にかなりの差が生じたが、これは部材高さの小さい供試体であるためと考えられる。したがって、部材寸法の大きな実構造物にあっては、コンクリートの応力-ひずみ曲線の影響は小さいものと推定され、一般的な解析は、標準示方書に示されている応力-ひずみ曲線で十分であると判断される。
- 鉄筋およびPC鋼材の応力-ひずみ曲線は、破壊荷重、たわみ性状に少なからぬ影響を与えるので、できるだけ実際に使用する鉄筋およびPC鋼材の応力-ひずみ曲線を用いるのが望ましい。

- ③ PC不静定梁の非線形挙動について基礎的な検討を行い、次のような新しい知見が得られた。

- プレストレスを導入することにより、ひび割れ、たわみなどの供用状態の挙動は改善できるが、プレストレスは、構造系の破壊には無関係であり、配置されている鋼材が同一であればプレストレスを与えても与えなくても終局強度は同一である。
- PPC構造の供用状態の検討に用いる曲げモーメントの算出は、非線形解析によるのが望ましい。
- プレストレスの導入レベルを変えることにより、破壊の先行する位置の制御が可能である。
- モーメントの再分配率はプレストレスの導入レベルに応じて変えるのがよい。

6. コンクリート構造のクリープ解析⁵⁾

6.1 一般

持続的に作用する応力を受けるコンクリート部材のひずみは、一般に弾性ひずみとコンクリートのレオロジカル挙動によって経時的に変化するひずみにより構成される。コンクリートのレオロジカル挙動によるひずみは、クリープひずみと乾燥収縮ひずみに分けられ、前者は、持続的に作用する応力に関連して、また後者は、応力とは無関係に発生する。このコンクリートのレオロジカル挙動により、コンクリート構造物には、変形の増加、持続的な強制変形による応力の再分配、鋼材などのクリープを無視し得る材料との複合あるいは材齢の異なるコンクリート部材との合成などによる応力の再分配、などの現象が発生する。これらの現象

は、コンクリート構造物の供用性、耐久性に無視し得ぬ影響を及ぼすため、設計、施工に必ず考慮する必要がある。

6.2 クリープ解析法一般

現在、一般に使用されている代表的なクリープ解析法には、次のようなものがある。

(1) 微分方程式による解析法

任意時間におけるひずみ釣合い式を微分方程式で表し、これを解くことによって解を求める方法であり、1937年 Dischinger により最初に解かれたため、Dischinger 法とも呼ばれる。Dischinger 法が成立した頃は、クリープ成分は、フロー成分のみであると考えられていたが、Rush と Jungwirth は、クリープを遅れ弾性成分とフロー成分の和として、Dischinger の結果を改良した。この方法は、改良 Dischinger 法とも呼ばれる。これらの方法を適用できる予測式や解析可能なクリープ問題は、限定されるが、最も厳密な解が得られる。

(2) 平均応力法による解析法

時間 t_0 から任意の時間 t の間に生ずるクリープによって発生する応力の平均値が、時間 t_0 から作用していたと仮定してひずみ釣合い式を作り、これを解くことによって解を求める方法である。時間 t_0 から t の間を適切に分割し、クリープの重合せ則に基づいて区分求積を行うことにより、解の精度を高めることができる。この方法は、任意の予測式およびクリープ問題を取り扱うことができる。

(3) 有効弾性係数法による解析法

Trost によって提案され、その後、Bazant によって改良された方法で、クリープの影響を弾性係数の変化として表した有効弾性係数を用いてひずみ釣合い式を作り、これを解くことによって解を求める方法である。有効弾性係数は、コンクリートの材齢の進行を考慮した材齢係数によって修正したクリープ係数を用いて定められる。材齢係数は、一般に 0.5 から 1.0 の間にあるが、0.8 として十分な近似解が得られると言われている。

この方法は、逐次計算を不要とした点で優れているが、平均応力法ほど汎用的であるとは言えない。

以上に述べたクリープ解析法のうち、平均応力法は、最も平明な方法であり、汎用性にも優れている。したがって、ここでは、平均応力法と区分求積法を利用した変位法によるクリープ解析法について詳しく説明する。

6.3 区分求積法と平均応力法を利用した変位法によるクリープ解析

(1) 特徴

以下に示すクリープ解析法は、次のような特徴を有している。

① 区分求積法を採用しているため、任意のクリープ、乾燥収縮ひずみの予測モデルに対応することができる。

従来は、クリープの遅れ弾性成分もフロー成分と見なすとか、進行速度の速い遅れ弾性成分を先行してすべて発生させ、その後フロー成分を進行させるなどの方法が一般的であった。ここに示す解析法は、遅れ弾性成分とフロー成分のそれぞれに応じた進行度を考慮することが可能であり、また、区分求積法を採用しているため、標準示方書以

外の子測モデルも考慮することができる。

② 断面に配置されている任意の段数の付着ある鋼材（鉄筋、PC鋼材など）が、クリープ、乾燥収縮を拘束する影響を考慮することができる。

一般的に、鋼材がクリープ、乾燥収縮ひずみを拘束することにより発生する経時応力は、断面に配置されているPC鋼材はその図心位置に集中的に配置されると仮定し、また、鉄筋は無視して求めている。応力法により正しい解を求めるためには、配置段数に等しいひずみ釣合い式を立て、それらよりなる連立方程式を解く必要があるため、非常に面倒である。ここに示す方法においては、変形法を採用し、断面に配置されている任意の段数の付着ある鋼材の、クリープ、乾燥収縮に対する拘束効果の算出を可能にしている。したがって、この方法は、クリープ、乾燥収縮ひずみの経時変化を鉄筋ひずみの経時変化から推定できるため、実験や実構造物の経時応力や変形の測定などにも役立つことができる。

③ 断面を分割施工する合成桁、鋼合成桁、波形ウェブ橋などクリープするコンクリートとクリープを無視できる鋼で構成される複合断面、構造系の変化を伴う施工を行う不静定構造およびこれらの複合としての連続合成桁など、各種の施工法による任意の構造のクリープ解析が可能である。

従来のクリープ解析は、応力法によって行われることが一般的であるため、施工法および構造系に応じ個別に解を求めていた。これに対し本解析法は、変形法によりクリープ解析を実施しているため施工法や構造系にかかわらず、一般的に解を求めることができる。

また、持続荷重の段階的な載荷除荷、一時的な支承や部材の設置、除去などの影響も考慮することができる。

④ ②項と③項の相関関係を考慮することができる。

従来は、断面応力度の経時変化と構造系に生ずる断面力の変化は、個別に求め、最終的に加算するのが一般的であった。これに対し本提案法においては、両者の相関関係を考慮した解析が可能である。

(2) 応力-ひずみの関係

時間 (0) で持続応力 $\sigma_{(0)}$ を作用させ、この持続応力が経時的に変化するものとする、時間 (0) から時間 (t) の間には、次のようなひずみの変化が生じ、応力-ひずみ関係は式(1)のように表すことができる。

$$\textcircled{1} \quad \sigma_{(0)} \text{によるクリープひずみ} \dots\dots\dots \frac{\sigma_{(0)}}{E_{c,28}} \cdot \phi(t,0)$$

$$\textcircled{2} \quad \text{時間 (0) から時間 (t) の間に生ずる応力度 } \Delta\sigma_{(t,0)} \text{ による弾性ひずみ}$$

$$\dots\dots\dots \frac{\Delta\sigma_{(t,0)}}{E_c(t)}$$

$$\textcircled{3} \quad \Delta\sigma_{(t,0)} \text{によるクリープひずみ}$$

$$\dots\dots\dots \frac{\Delta\sigma_{(t,0)}}{2 \cdot E_{c,28}} \cdot \phi(t,0)$$

(平均応力 $\Delta\sigma_{(t,0)}/2$ が時間 0 から作用していたと仮定する)

$$\textcircled{4} \quad \text{応力に無関係な乾燥収縮、温度変化などの強制変形}$$

によるひずみ $\epsilon_{s(t, 0)}$

$$\begin{aligned} \Delta \epsilon(t) &= \frac{\sigma(0)}{E_{c, 28}} \cdot \phi(t, 0) + \frac{\Delta \sigma(t, 0)}{E_c(t)} + \frac{\Delta \sigma(t, 0)}{2 \cdot E_{c, 28}} \cdot \phi(t, 0) + \epsilon_{s(t, 0)} \\ &= \frac{\sigma(0)}{E_{c, 28}} \cdot \phi(t, 0) + \frac{\Delta \sigma(t, 0)}{E_c(t)} \left(1 + \frac{E_c(t)}{2 \cdot E_{c, 28}} \cdot \phi(t, 0) \right) \\ &\quad + \epsilon_{s(t, 0)} \dots (1) \end{aligned}$$

ここに、

- $\Delta \epsilon(t)$: 時間 (0~t) 間に発生するひずみの変化
- $\sigma(0)$: 時間 (0) で作用した応力度
- $\Delta \sigma(t, 0)$: 時間 (0~t) の間に発生する応力度の変化
- $E_c(0), E_c(t), E_{c, 28}$: 時間 (0), 時間 (t) および材齢 28日における弾性係数

$$m' : \frac{E_c(t)}{E_{c, 28}}$$

- $\phi(t, 0)$: 時間 (0~t) の間に進行するクリープ係数
- $\epsilon_{s(t, 0)}$: 時間 (0~t) の間に進行する応力に無関係な乾燥収縮, 温度変化などの強制変形によるひずみ

式(1)を書き換え $\Delta \sigma(t, 0)$ について解くと式(2)が得られる。

$$\Delta \sigma(t, 0) = \Phi(t, 0) \cdot \left(\Delta \epsilon(t) \frac{\sigma(0)}{E_{c, 28}} \cdot \phi(t, 0) - \epsilon_{s(t, 0)} \right) \dots (2)$$

ここに、

$$\Phi(t, 0) = E_c(t) / \left\{ 1 + \frac{m'}{2} \cdot \phi(t, 0) \right\}$$

コンクリート構造物の一般的な断面として図-18に示すような床版と主桁を合成した断面を考え、接合面(主桁上縁, 維k)の時間(t)における軸方向ひずみと断面曲率を $\epsilon_{k(t)}$, $\psi_{k(t)}$ と表わすものとする。この場合の任意の維(x)におけるコンクリートのひずみ $\epsilon_{x(t)}$ は, 式(3)で求められる。

$$\epsilon_{x(t)} = \epsilon_{k(t)} + \psi_{k(t)} \cdot y_x \dots (3)$$

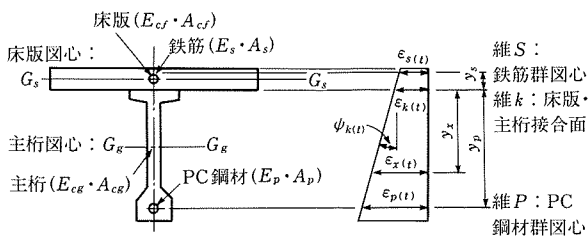


図-18 断面内のひずみ状態

また, 時間(t)における任意の維(x)におけるコンクリートの応力度の変化 $\Delta \sigma_{x(t)}$ は, 式(2), (3)より次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{x(t)} &= \Phi(t, 0) \cdot \left\{ \left(\epsilon_{k(t)} + \psi_{k(t)} \cdot y_x \right) - \epsilon_{s(t, 0)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma_{x(0)}}{E_{c, 28}} \cdot \phi(t, 0) \right\} \dots (4) \end{aligned}$$

同様に, 鉄筋およびPC鋼材の応力度変化 $\Delta \sigma_s(t)$, $\Delta \sigma_p(t)$ は, 式(5), (6)で与えられる。

$$\Delta \sigma_s(t) = E_s (\epsilon_{k(t)} + \psi_{k(t)} \cdot y_s) \dots (5)$$

$$\Delta \sigma_p(t) = E_p (\epsilon_{k(t)} + \psi_{k(t)} \cdot y_p) \dots (6)$$

ここに、

- E_s : 鉄筋の弾性係数
- E_p : PC鋼材の弾性係数

このように, 接合面のひずみと断面曲率が求まれば, 鉄筋, PC鋼材に生ずるクリープおよび乾燥収縮などの強制変形による応力度の変化は, 容易に求めることができる。

(3) 釣合い式および変形法の基本式

床版と主桁の接合面に時間(t)において, クリープおよび強制変形などにより, 軸力 $N_{cr(t)}$ および曲げモーメント $M_{cr(t)}$ が作用しているものとする, 釣合い式は, 次のようになる。

$$N_{cr(t)} = \int \Delta \sigma_{x(t)} \cdot dA_{cf} + \int \Delta \sigma_{x(t)} \cdot dA_{cg} + A_s \cdot \Delta \sigma_s(t) + A_p \cdot \Delta \sigma_p(t) \dots (7)$$

$$M_{cr(t)} = \int \Delta \sigma_{x(t)} \cdot y_x \cdot dA_{cf} + \int \Delta \sigma_{x(t)} \cdot y_x \cdot dA_{cg} + A_s \cdot \Delta \sigma_s(t) \cdot y_s + A_p \cdot \Delta \sigma_p(t) \cdot y_p \dots (8)$$

ここに, サブスクリプト f は床版部を, g は主桁部を意味している。

式(7)に式(4)~(6)を代入して積分すると次のようになる。

$$\begin{aligned} N_{cr(t)} &= \left\{ \Phi(t, 0) \left\{ A_c \cdot \epsilon_{k(t)} + Q_c \cdot \psi_{k(t)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - A_c \cdot \epsilon_{s(t, 0)} - \frac{1}{E_{c, 28}} \cdot N(0) \cdot \phi(t, 0) \right\} \right\} f \\ &\quad + \left\{ \Phi(t, 0) \left\{ A_c \cdot \epsilon_{k(t)} + Q_c \cdot \psi_{k(t)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - A_c \cdot \epsilon_{s(t, 0)} - \frac{1}{E_{c, 28}} \cdot N(0) \cdot \phi(t, 0) \right\} \right\} g \\ &\quad + (E_s \cdot A_s + E_p \cdot A_p) \epsilon_{k(t)} + (E_s \cdot Q_s + E_p \cdot Q_p) \psi_{k(t)} \dots (9) \end{aligned}$$

同様に, 式(8)に式(4)~(6)を代入して積分し, 整理すると断面力とひずみの経時変化に関する釣合い式は, 式(10)となる。

$$\begin{pmatrix} N_{cr(t)} \\ M_{cr(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2 & D_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \epsilon_{k(t)} \\ \psi_{k(t)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \dots (10)$$

ここに、

$$\begin{aligned} D_1 &= (\Phi(t, 0) \cdot A_c)_f + (\Phi(t, 0) \cdot A_c)_g + E_s \Sigma A_s + E_p \Sigma A_p \\ D_2 &= (\Phi(t, 0) \cdot Q_c)_f + (\Phi(t, 0) \cdot Q_c)_g + E_s \Sigma Q_s + E_p \Sigma Q_p \\ D_3 &= (\Phi(t, 0) \cdot I_c)_f + (\Phi(t, 0) \cdot I_c)_g + E_s \Sigma I_s + E_p \Sigma I_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1 &= [\Phi(t, 0) \left(\frac{1}{E_{c, 28}} \phi(t, 0) N(0) + A_c \cdot \epsilon_{s(t, 0)} \right)] f \\ &\quad + [\Phi(t, 0) \left(\frac{1}{E_{c, 28}} \phi(t, 0) N(0) + A_c \cdot \epsilon_{s(t, 0)} \right)] g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2 &= [\Phi(t, 0) \left\{ \frac{1}{E_{c, 28}} \phi(t, 0) (N(0) Q_c / A_c + M(0)) \right. \\ &\quad \left. + Q_c \cdot \epsilon_{s(t, 0)} \right\}] f + [\Phi(t, 0) \left\{ \frac{1}{E_{c, 28}} \phi(t, 0) (N(0) Q_c / A_c \right. \\ &\quad \left. + M(0)) + Q_c \cdot \epsilon_{s(t, 0)} \right\}] g \end{aligned}$$

E_{cf}, E_{cg} : 床版および主桁コンクリートの弾性係数
 $A_{cf}, A_{cg}, \Sigma A_s, \Sigma A_p$: 床版および主桁コンクリートの断面積, 各段の鉄筋, PC鋼材の断面積の和

$Q_{cf}, Q_{cg}, \Sigma Q_s, \Sigma Q_p$: 接合面(維:k)まわりの床版および主桁コンクリートの断面1次モーメント

ント, 同じく各段の鉄筋, PC鋼材の断面
1次モーメントの和

$I_{cf}, I_{cg}, \Sigma I_s, \Sigma I_p$: 接合面(縦:k)まわりの床版および主桁コンクリートの断面2次モーメント, 同じく各段の鉄筋, PC鋼材の断面2次モーメントの和

$N_{(0)f}, M_{(0)f}$: 時間(0)において床版圆心に作用する軸力および曲げモーメント

$N_{(0)g}, M_{(0)g}$: 時間(0)において主桁圆心に作用する軸力および曲げモーメント

$\phi(t, 0)_f, \phi(t, 0)_g$: 時間(0~t)間に進行する床版, 主桁コンクリートのクリープ係数

$$\phi(t, 0)_f = E'_c(t) / (1 + 0.5 \cdot \frac{E'_c(t)}{E'_{c,28}}) \phi(t, 0)_f$$

$$\phi(t, 0)_g = E_c(t) / (1 + 0.5 \cdot \frac{E_c(t)}{E_{c,28}}) \phi(t, 0)_g$$

$E'_c(t), E'_{c,28}$: 時間(t)および材齢28日における床版コンクリートの弾性係数

$E_c(t), E_{c,28}$: 時間(t)および材齢28日における主桁コンクリートの弾性係数

$[\epsilon_s(t, 0)]_f, [\epsilon_s(t, 0)]_g$: 時間(0~t)間に進行する床版, 主桁コンクリートの乾燥収縮などの強制変形によるひずみ

また, 式(10)に基づく任意の時間区分(r-1)から(r)における変形法の基本式は, 式(11)のように表わすことができる。

$$\begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ M_i \\ X_j \\ Y_j \\ M_j \end{pmatrix} = \frac{1}{l} \begin{pmatrix} D_1 & 0 & -D_2 \\ 0 & 12D_0/l^2 & 6D_0/l \\ -D_2 & 6D_0/l & 4D_3 - 3D_2^2/D_1 \\ -D_1 & 0 & D_2 \\ 0 & -12D_0/l^2 & -6D_0/l \\ D_2 & 6D_0/l & 2D_3 - 3D_2^2/D_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ F_1 \\ 0 \\ -F_2 \end{pmatrix} \quad \dots(11)$$

ここに,

$$D_0 = D_3 - D_2^2 / D_1$$

$X_i, Y_i, M_i, X_j, Y_j, M_j$: 部材端断面力(図-19)

$u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j$: 部材端の変形量(図-19)

(4) 区分求積法の導入

汎用性, 実用性をもたせるためには, 区分求積法が適している。前述したように, この方法によれば, 時間区分数に応じた精度の解を求めることができ, また, 任意のクリープ予測式およびクリープ問題を取り扱うことが可能となる。

区分求積法においては, 式(1)の応力-ひずみの関係式の代わりに次式を用いる。

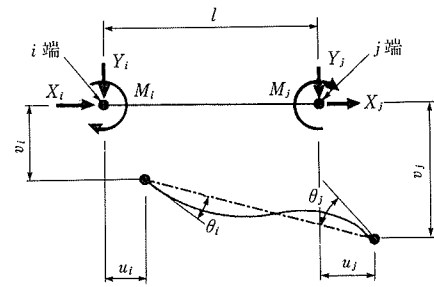


図-19 変位と力の関係

また, 標準示方書には, コンクリートの材齢による弾性係数の変化は規定されていないので, コンクリートの弾性係数は, 部材のコンクリート強度に応じて, すべて材齢28日の値を用いることとする。

$$\begin{aligned} \delta \epsilon_{(r)} = & \sum_{m=1}^{r-1} \Delta \sigma_{(m)} (\phi_{r,m} - \phi_{r-1,m}) / E_{c,28} \\ & + \Delta \sigma_{(r)} (1 + 0.5 \cdot \phi_{r,r-1}) / E_{c,28} + \Delta \epsilon_{s(r,r-1)} \dots(12) \end{aligned}$$

ここに,

$r, r-1$: 時間(0)から∞の間を施工段階, 荷重作用段階などを考慮して分割した時間区分のうちクリープ解析を実施しようとする時間区分

m : 時間(0)から(r-1)までの間の任意の時間区分

$\Delta \epsilon_{(r)}$: 時間(r-1)から(r)の間で発生するひずみ

$\Delta \sigma_{(r)}$: 時間(r-1)から(r)の間で発生する応力

$\Delta \sigma_{(m)}$: 時間(m-1)から(m)の間で発生する応力

$\phi_{r,m}$: 時間(m)から(r)までに進行するクリープ係数

$\Delta \epsilon_{s(r,r-1)}$: 時間(r-1)から(r)の間で発生する乾燥収縮などの強制変形によるひずみ

また, 式(10)において, D_1 から D_3 および荷重項 F_1, F_2 のサブスクリプトt, 0をr, r-1に置き換えるとともに, F_1, F_2 については, さらに, 次の置換えを行うものとする。

$$\begin{aligned} \phi(t, 0) \cdot N_{(0)} & \rightarrow \sum_{m=1}^{r-1} (\phi_{r,m} - \phi_{r-1,m}) \cdot N_{(m)} \\ \phi(t, 0) (N_{(0)} \cdot Q_c / A_c + M_{(0)}) & \rightarrow \sum_{m=1}^{r-1} (\phi_{r,m} - \phi_{r-1,m}) \cdot (N_{(m)} \cdot Q_c / A_c + M_{(m)}) \end{aligned}$$

(5) クリープ解析の手順

以上に示したクリープ解析の手順を図-20に示す。なお, この手順においては, 式(11)を, 式(13)のように表現している。

$$F = D \cdot U + P \dots(13)$$

また, 本解析においては, 任意の時間 t_{i-1} から t_i の間においてクリープにより発生した不静定力 $\Delta X_{\phi, i}$ による遅れ弾性ひずみの変化は図-21に示すように, $\Delta X_{\phi, i}$ が t_{i-1} および t_i で発生したものとして得られるひずみ進行曲線の平均としている。

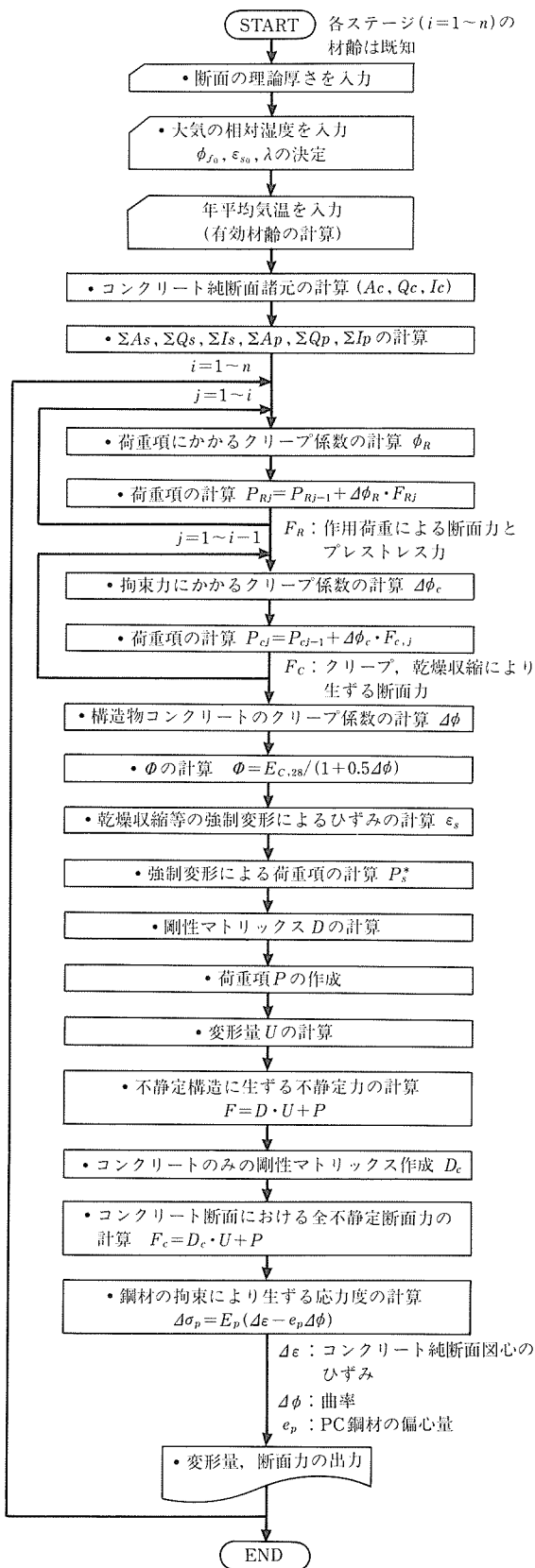


図-20 クリープ解析のフローチャート

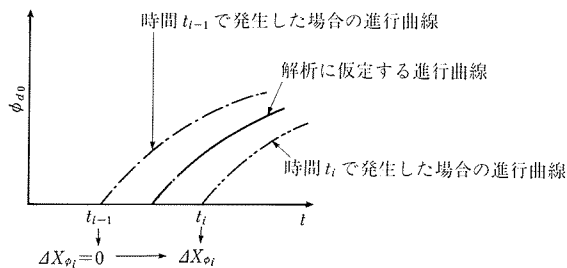


図-21 クリープにより発生する不静定力に対する遅れ弾性の進行曲線

7. あとがき

コンクリート橋の構造解析技術について示した。コンクリート橋の構造形式、施工法は多様化しており、従来の骨組構造としての解析、線形解析のみでは正しい設計を行い得なくなっている。設計者は、どのような解析により設計すべきかの判断を正しく行えるよう努めなければならない。一方、応用力学やコンピュータは急速に発達し、任意の構造形式、形状、材料等のほとんどすべてに対応可能であり、かつ精密になっている。精密な道具を使えば、良い設計である、使えることが高い技術力を備えているなどの錯覚があるように思われてならない。

これらは、道具にすぎず、使う人によって良い道具とも悪い道具ともなることを十分認識する必要がある。

構造解析が正しく行われ、良いコンクリート橋が建設されることを心から願っている。

参考文献

- 1) 土木学会：土木工学ハンドブック，第4版，pp.273~276，技報堂出版，1989
- 2) Pucher：Influence Surface of Elastic Plates，chart 27，Springer-Verlag，1964
- 3) Bares, Massonnet, 成岡, 国広 監訳：ギヨン・マンソネ・バレッシュ法による格子桁と直交異方性版の計算，pp.200~201，共立出版，1969
- 4) 小宮：PC構造の供用時および終局時の挙動解析に関する基礎的研究，pp.117~163，1996
- 5) 小宮, 酒井, 前田：任意形コンクリート構造物のクリープ解析法に関する一提案，プレストレストコンクリート，Vol.29, No. 2, pp.8~17, 1987

【2001年1月12日受付】