

# 第7回 FEM解析（その1） 基礎知識・モデルの作成

講師：井出 章子\*

## 1. はじめに

有限要素法解析（以下、FEM解析）は、対象物を忠実にモデル化することが可能なため、骨組み解析ではモデル化が困難な構造や、応力が集中する局所的な挙動を把握したい場合などに有効な解析です。また、部材ごとに材料特性（ヤング率、ポアソン比、板厚、密度など）を与えることができるため、材質の異なる部材で構成される構造物の解析が可能です。さらに、コンクリートのひび割れや、鉄筋の降伏を考慮した非線形解析を行うこともできます。

PC橋においては、外ケーブルの定着部や偏向部における補強鉄筋量の算定、支持条件が複雑なストラット付き床版の応力分布の把握および、平面保持の仮定が必ずしも成立しない波形鋼板ウェブ橋の設計などに用いられます（図-1）。今回の講座では、線形解析に的を絞って、FEM解析を初めて行う技術者に対して、その基礎知識やモデル作成上の留意点の説明を行います。

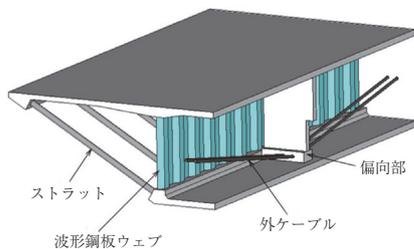


図-1 FEM解析が用いられる構造物例

## 2. モデル作成

FEM解析は、対象構造物を細かく要素に分割し、その分割した各要素について近似的に応力と変位の関係を求め、要素の集合体である構造物に対して成立する方程式を行列演算により解く方法です。

ここでは、FEM解析の基本となる要素の種類およびその出力成分、モデル化に際しての分割方法、載荷荷重、拘束条件について説明します。

### 2.1 要素の種類および出力成分

FEM解析で使用する要素には梁要素（1次元要素）、平面応力要素（2次元要素）、シェル要素（3次元要素）、ソ

リッド要素（3次元要素）、さらに特殊要素としてバネ要素や接触要素などがありますが、今回は使用頻度の高い2次元要素、3次元要素について説明します。

#### (1) 平面応力要素（2次元要素）

2次元平面問題（1つの平面上で構造物の挙動を表現できる構造解析問題）に置き換えることが可能な構造に対して使用する要素で、解析結果として、変位、応力などを出力することが出来ます（図-2）。断面力を求めたい場合は、応力から断面力を換算します。換算方法については、4章で説明します。

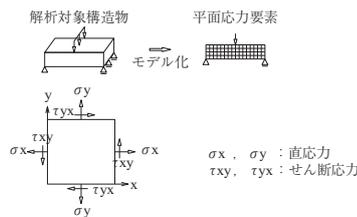


図-2 平面応力要素

#### (2) シェル要素（3次元要素）

3次元問題（構造物の挙動を立体的に表現する構造解析問題）に使用する要素で、一般に床版や壁などの板状の構造をモデル化する場合に使用します。面内・面外の荷重を載荷することができ、解析結果として、変位、応力、断面力を出力することができます（図-3）。

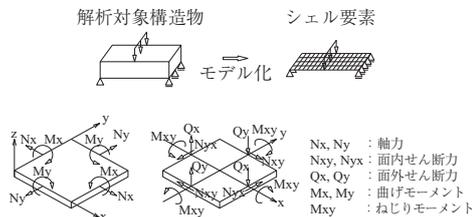


図-3 シェル要素

#### (3) ソリッド要素（3次元要素）

シェル要素でモデル化できないような部材厚の大きな構造物や、形状を忠実にモデル化する場合などに用いる要素で、4面体、5面体、6面体などがあります。解析結果と

\* Ide Akiko : JIP テクノサイエンス(株) 建設ソリューション事業部 東京営業部

して、変位、応力を出力することができますが、平面応力要素と同様に断面力は直接出力することができません（図 - 4）。断面力を求めたい場合は、平面応力要素と同様の方法で、応力から断面力を換算します。

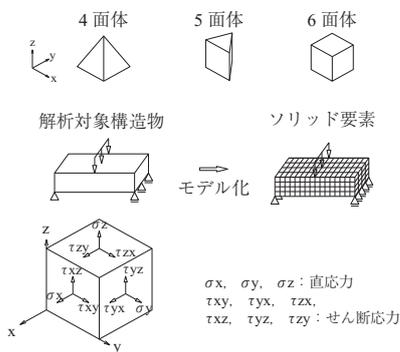


図 - 4 ソリッド要素

(4) 出力成分

要素によって出力される変位成分や応力成分が異なるため、解析目的にあった要素を選択する事が必要です。各要素で主に使用される出力成分の一覧表を表 - 1 に示します。

表 - 1 各要素の出力項目

要素種類	変位	断面力				応力	
		軸力	曲げモーメント	せん断力	ねじり	直応力	主応力
梁要素	○	○	○	○	○	△	△
平面応力要素	○	○	-	○	-	○	○
シェル要素	○	○	○	○	○	○	○
ソリッド要素	○	-	-	-	-	○	○

※ 梁要素は形状入力の場合のみ応力を算出できます。

各要素には要素座標があり、使用するプログラムにも依存しますが、直応力は全体座標系（構造全体の座標系）や要素座標系（要素ごとの座標系）で出力することができます。直応力を要素座標系で出力する場合は、要素座標系の向きをあらかじめ把握しておくことが重要です。図 - 5 の (a) と (b) は同じ解析条件で、要素座標系だけが異なるモデルです。この場合 (a) での曲げ応力は要素座標系 x 方向に生じ、(b) での曲げ応力は要素座標系 y 方向に生じます。

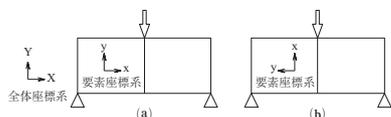


図 - 5 要素座標系

また FEM 解析では、主応力を出力することも可能です。主応力とは、せん断成分が 0 になるように座標系をとったときの応力で、一般に、もっとも厳しい圧縮応力もしくは引張応力を確認する際に使用します（図 - 6）。

2.2 要素分割

モデルを作成するうえで行う要素分割は、解析精度に大きな影響を与えます。ほかにもさまざまな考慮すべき事項がありますが、ここでは入門編として、重要なポイントに

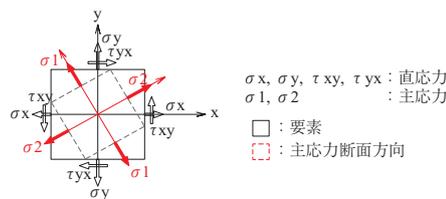


図 - 6 主応力と直応力

的を絞り説明します。

(1) 要素のサイズ

FEM 解析は近似解法であるため、一般的には対象構造全体を細かく分割すれば、高精度な解を得ることができます。しかし、要素分割を細かくすればするほど、解析規模が大きくなり、モデルの取扱いの煩雑さが増していきます。この問題の対処法の 1 つとして、着目する箇所があらかじめ決まっている場合には、その近傍を細かく分割し、他の部分を粗くすることにより、全体の要素数を少なくするという手法が用いられます。

一例として、図 - 7 に示す単純ばりについて、構造全体を細かく要素分割した場合（節点数 506）と、着目箇所近傍のみを細かく要素分割した場合（節点数 314）の着目部の応力を比較してみます。なお、着目部近傍の細分化範囲は、桁高の 2 倍～3 倍程度が目安となるため、今回のモデルでは 2.1 m の範囲を細分化範囲としています。

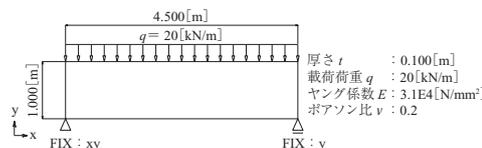


図 - 7 解析条件

図 - 8 に示す解析結果から、着目部の x 方向直応力 (σx) は一致していることがわかります (+ : 引張応力 [N/mm²], - : 圧縮応力 [N/mm²])。

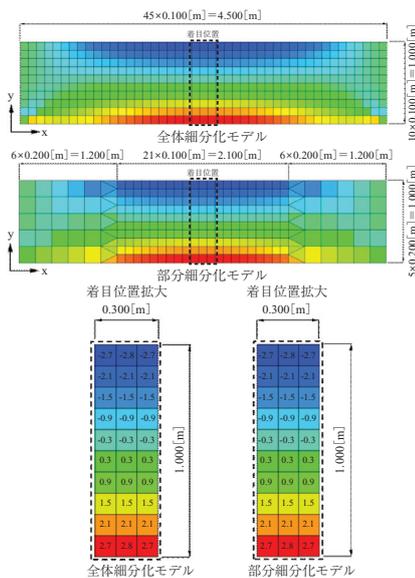


図 - 8 分割方法の比較

このように着目部のみを細かい分割にするモデルでも適切な要素分割を行なうことにより着目部分の解析精度を確保することができます。

FEM 解析における要素サイズについては、解析の目的（応力の流れ、変位量の把握、局部応力の確認など）や対象構造の規模（全体構造物、部材単位など）、挙動特性（軸力部材、曲げ部材など）に応じて設定する必要がありますが、残念ながら明確な基準はありません。しかし、一般によく用いられるいる要素サイズの目安はあり、たとえばコンクリート部材に対して引張鉄筋量の算定が目的であれば、引張鉄筋の位置などを考慮して 100 mm 程度の要素でモデル化することが多いです。一方、鋼部材のホットスポット応力（構造的な応力集中による応力）を確認する際には、数 mm 程度の要素サイズを用いる場合もあります。このように、要素サイズの設定については、経験に依存する部分が多いため、判断が難しい場合は文献や既往の解析例などを参考に決定すると良いでしょう。

(2) 要素の組合せ

解析モデルは、三角形要素と四角形要素を組み合わせで作成します。しかし、一般に三角形要素は四角形要素に比べ精度が低く、また、両者の剛性や要素座標系の定義方法には差異があります。そのため、PC 構造物の解析では、四角形要素（ソリッド要素の場合は 6 面体）の使用を基本とし、着目範囲外との境界で分割ピッチ数を変更する場合や、四角形では正確に再現できない箇所をモデル化する際などに限り三角形要素を使用することが望ましいです。

(3) アスペクト比と要素のゆがみ

アスペクト比とは、要素の縦横比率（図 - 9）のことで、この比率が大きくなると解析精度が低下します。

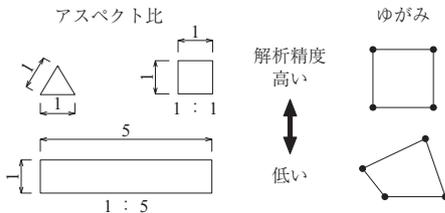


図 - 9 アスペクト比と要素のゆがみ

アスペクト比は 1 : 1 とするのが理想ですが、要素分割を行う際に大きな制約となるため、実務上では 1 : 3 ~ 1 : 5 程度を限度とすると良いでしょう。また、正方形や正三角形に近い方が、解析精度が高くなるため、極力、ゆがみのない要素を作成するように心掛ける必要があります。

2.3 荷重条件

FEM 解析で載荷する荷重は、自重、活荷重、プレストレス、温度などがあります。ここでは、PC 橋特有のプレストレス荷重の載荷例と、床版設計時の活荷重載荷について紹介します。図 - 10 (a) のように、柱頭部における外ケーブル定着部の FEM 解析では、PC 鋼材はモデル化せず、定着部に外力としてプレストレス力を与えるのが一般的です。図 - 10 (b) のように、内ケーブル定着突起の FEM 解析では、プレストレス力に加えて偏向力を載荷します。ま

た、床版設計時において道路橋示方書で示されている断面力算出方法の適用範囲外である場合や、支点条件が複雑なストラット付床版などを適切に評価するためには、図 - 10 (c) のように床版支間中央や、張出先端など着目位置に対し応力をもっとも厳しくなるように T 荷重を載荷します。

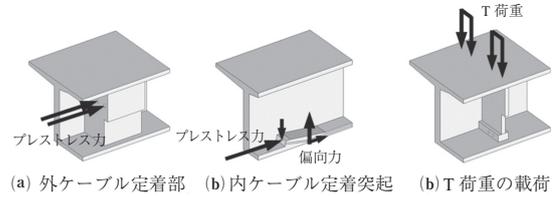


図 - 10 荷重載荷図

2.4 拘束条件

拘束条件は、対象構造物が想定した挙動となるように設定します。独立した節点は 6 つの自由度（要素を構成する節点移動できる方向）をもっており、構成する要素の特性によって異なりますので、同じ拘束条件であっても拘束すべき自由度は異なります。表 - 2、3 に拘束条件の設定例を示します。

表 - 2 単純支持モデルの拘束条件設定例

要素種類	左側支点						右側支点						
	軸に平行な方向			軸回りの回転方向			軸に平行な方向			軸回りの回転方向			
	X軸方向	Y軸方向	Z軸方向	X軸回り	Y軸回り	Z軸回り	X軸方向	Y軸方向	Z軸方向	X軸回り	Y軸回り	Z軸回り	
梁要素	拘束	拘束	拘束	拘束	自由	自由	自由	拘束	拘束	拘束	自由	自由	自由
平面応力要素	拘束	拘束	-	-	-	-	自由	拘束	-	-	-	-	-
シェル要素	拘束	拘束	拘束	自由	自由	自由	自由	拘束	拘束	拘束	自由	自由	自由
ソリッド要素	拘束	拘束	拘束	-	-	-	自由	拘束	拘束	拘束	-	-	-

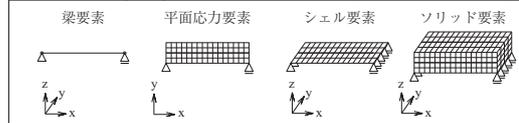
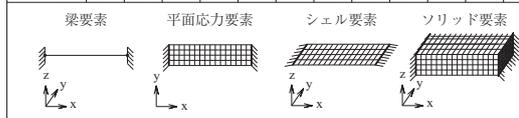


表 - 3 完全固定モデルの拘束条件設定例

要素種類	左側支点						右側支点						
	軸に平行な方向			軸回りの回転方向			軸に平行な方向			軸回りの回転方向			
	X軸方向	Y軸方向	Z軸方向	X軸回り	Y軸回り	Z軸回り	X軸方向	Y軸方向	Z軸方向	X軸回り	Y軸回り	Z軸回り	
梁要素	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束
平面応力要素	拘束	拘束	-	-	-	-	拘束	拘束	-	-	-	-	-
シェル要素	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束	拘束
ソリッド要素	拘束	拘束	拘束	-	-	-	拘束	拘束	拘束	拘束	-	-	-



3. モデル作成の省力化

ここでは、解析条件や目的にあったモデル作成の省力化について説明します。一般に解析時間は、節点数の累乗に比例します。簡単なモデルであれば数秒の違いでも 10 万点を超えるような実橋モデルでは数十分～数時間の違いが出てきます。データ容量も同様に、節点数に比例して大きくなります。適切なモデル化を行うことは、要素数を減らし、モデル作成や結果の評価に要する時間、解析時間などを大幅に短縮することとなるため、非常に重要です。

3.1 対称モデル

構造が対称で、かつ荷重および拘束条件も対称な場合

は、解析モデルを半分や1/4にしたうえで、境界となる切断面に適切な境界条件を設定することにより、全体解析と同じ解析結果を得ることができます。

(1) 解析モデル

図 - 11 のような等分布荷重が載荷された4辺固定版を想定し、全体モデルで解析を行った結果と対称条件を考慮した1/4モデルで解析を行った結果を比べてみます。

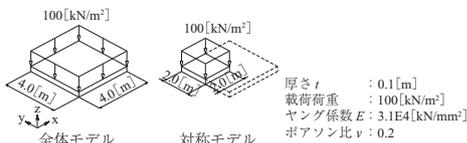


図 - 11 解析モデルと解析条件

(2) 境界条件

まず、対称モデルの端部辺は全体モデルと同様に完全固定(図 - 12)とします。また、対称面となる辺(切断面)の境界条件は、対称方向の軸に平行な変位と、それ以外の方向の回転変位を拘束します。その境界条件をまとめたものが、表 - 4 となります。境界条件1はYZ平面对称条件、境界条件2はXZ平面对称条件、両者が重複する境界条件3は境界条件1と2を併せたものになります。このように、対称モデルの境界条件には決まったパターンがあるので、覚えておくとう便利です。

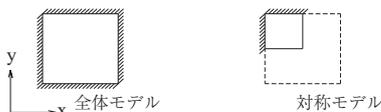


図 - 12 拘束条件

表 - 4 境界条件

自由度	軸に平行な方向			軸回りの回転方向			境界条件設定位置
	X軸	Y軸	Z軸	X回り	Y回り	Z回り	
境界条件1	拘束	-	-	-	拘束	拘束	
境界条件2	-	拘束	-	拘束	-	拘束	
境界条件3	拘束	拘束	-	拘束	拘束	拘束	

(3) 解析結果

図 - 13 は、実際に全体モデルと対称モデルでFEM解析を行い算出したx方向の曲げモーメント図(Mx)です。全体モデルと対称モデルで同じ解析結果が得られたことが確認できます。

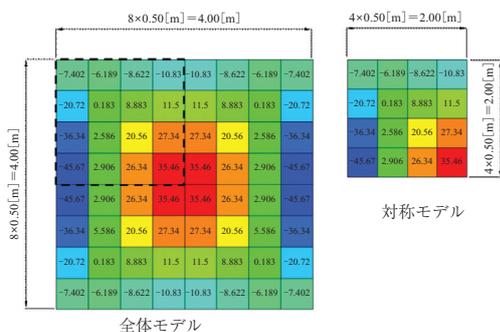


図 - 13 解析結果

3.2 局部モデル

解析モデルが対称でない場合でも、FEM要素でのモデル化範囲を一部分のみに限定することが可能で、これを一般に局部モデルと呼びます。構造が複雑な実橋レベルにおいて構造全体を2次元および3次元のFEM要素でモデル化するには非常に多くの労力を要しますが、たとえば着目部のみをソリッド要素でモデル化し、その他の領域を梁要素でモデル化することにより、モデル化の労力が格段に少なくすることが可能です。ただし、梁要素とソリッド要素の境界部には剛体等を設置し、平面保持が成立するように工夫する必要があります。

また、べつ的手法として、着目箇所近傍のみをソリッド要素でモデル化し、モデル境界部に、別途実施した骨組み解析の断面力を入力する方法があります。

正しくモデル化すれば、これら図 - 14 (a), (b), (c) 3つのモデルとも着目部の応力はすべて等しくなります。なお、局部モデルにおけるFEMモデル化範囲は、部材厚の2倍~3倍程度以上が目安となります。

FEM解析を行う際には、このような局部モデルに置き換えることが可能かどうか、あらかじめ検討を行うと良いでしょう。

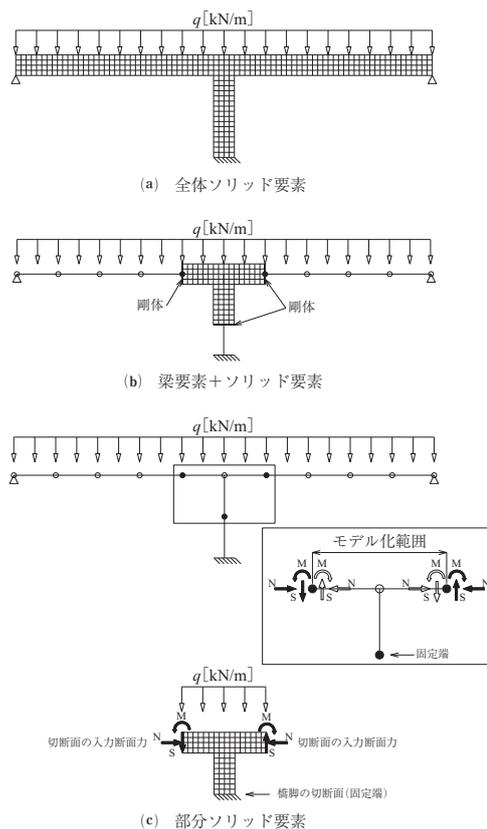


図 - 14 局部モデル化

4. 応力から断面力を換算する方法

平面応力要素やソリッド要素を用いて解析を行った場合、出力された応力をそのまま使用するのではなく、断面力に換算して設計に用いる場合があります。そこで、2.2

(1)の解析条件を用いて解析を行い、支間中央のx方向直応力(σx)分布より、曲げモーメントを算出する方法を説明します。なお、分割数の違いによる結果を比較するため、2分割、4分割、6分割、10分割の4ケースの結果を算出します(図-15(a)~(d))。まず、比較値として、梁の公式(式-1)を用いて着目要素位置(支間中央)での曲げモーメントを算出します。

$$M = \frac{ql^2}{8} \quad (\text{式-1})$$

M: 曲げモーメント [kN.m]

q: 分布荷重値 [m]

l: 支間長 [m]

$$M = \frac{20 \times 4.50^2}{8} = 50.625 \text{ [kN.m]}$$

これに対して、式-2を用いてx方向直応力(σx)から曲げモーメント算出します。式-2は、各要素の応力に断面図心から要素図心までの距離を乗じたものを足し合わせて断面力を求める方法です。

$$M = \sum \delta_i \cdot h_i \cdot t \cdot l_i \quad (\text{式-2})$$

M: 曲げモーメント [kN.m]

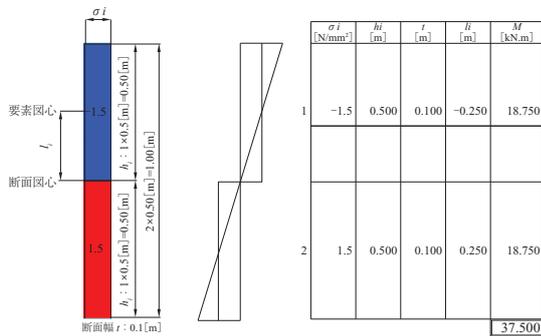
σi: 要素図心応力(支間中央) [N/mm²]

hi: 断面高さ方向の要素幅 [m]

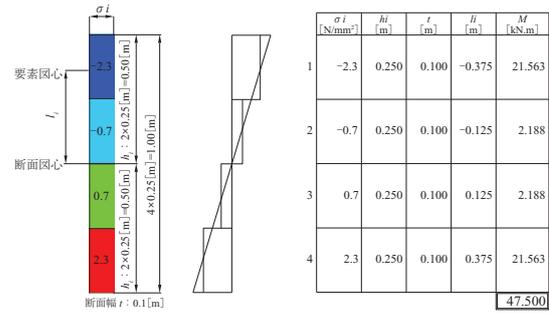
t: 断面幅 [m]

li: 断面図心位置から要素図心までの距離 [m]

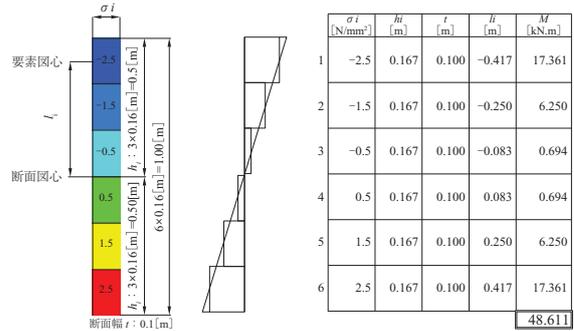
以上の結果より、梁の公式より求めた曲げモーメントに対して、FEM解析より求めた曲げモーメントは2分割では74.1%、4分割では93.8%、6分割では96.0%、10分割では99.6%となるのがわかります。FEM解析で得られた応力から断面力を換算する方法には、分割数の違いなどにより、精度に差異があることを理解して扱う必要があります。



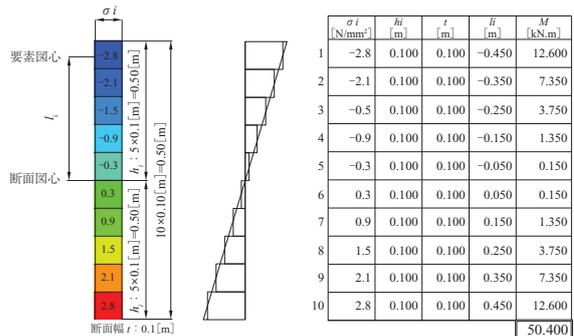
(a) 2分割モデル



(b) 4分割モデル



(c) 6分割モデル



(d) 10分割モデル

図-15

## 5. おわりに

今回の講座では、要素やモデル化についての基礎を解説しました。複雑な構造であるPC橋のFEM解析を行う技術者として、これから最適なモデル化や要素分割の知識を身につけていくうえで、本講座がその端緒となれば幸いです。

### 参考文献

- 1) 社団法人日本コンクリート工学協会：コンクリート構造物の設計にFEM解析を適用するためのガイドライン 1989年3月
- 2) 岸 雅彦：構造解析のための有限要素法実践ハンドブック
- 3) 土木学会構造工学委員会：構造工学技術シリーズ No.44 構造工学における有限要素法の基礎と応用

【2015年11月2日受付】